# Zusammenhang komplexer und reeller Fourier-Reihen

Die komplexe Fourier-Reihe

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$$

lässt sich auch in Sinus-Kosinus-Form darstellen:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right) .$$

Für die Koeffizienten gelten die Umrechnungsformeln

$$a_0 = 2c_0, \quad a_k = c_k + c_{-k}, \quad b_k = \mathrm{i}(c_k - c_{-k})$$

bzw.

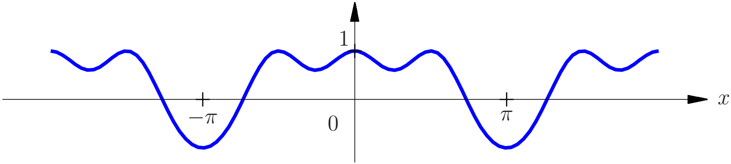
$$c_0 = \frac{1}{2}a_0, \quad c_k = \frac{1}{2}(a_k - \mathrm{i}b_k), \quad c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + \mathrm{i}b_k)$$

für $k \geq 1$.
Die Fourier-Reihe ist genau dann reell, wenn $c_{-k} = \overline{c_k}$.

# Beispiel:

reelle und komplexe Fourier-Reihe der Funktion

$$f(x) = \sin^4 x + \cos^3 x$$




gerade Funktion

$$f(x) = (1 - \cos^2 x)^2 + \cos^3 x = 1 - 2\cos^2 x + \cos^3 x + \cos^4 x$$

Umwandeln von $\cos^\ell x$ in Linearkombinationen von $\cos(kx)$

Additionstheoreme

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$

$$\begin{aligned}\cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 \\ \cos(3x) &= \cos x\cos(2x) - \sin x \underbrace{\sin(2x)}_{=2\sin x\cos x} = 4\cos^3 x - 3\cos x \\ \cos(4x) &= 2\,(\cos(2x))^2 - 1 = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1\end{aligned}$$

Sukzessives Auflösen $\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned}\cos^2 x &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x) \\ \cos^3 x &= \frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos(3x) \\ \cos^4 x &= \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{8}\cos(4x)\end{aligned}$$

Einsetzen in $f$ $\rightsquigarrow$

$$f(x) \quad = \quad \frac{3}{8} + \frac{3}{4}\cos x - \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{1}{8}\cos(4x)$$

reelle Fourier-Koeffizienten ($b_k = 0$)

$$a_0 = \frac{3}{4}, \quad a_1 = \frac{3}{4}, \quad a_2 = -\frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{1}{4}, \quad a_4 = \frac{1}{8}$$

komplexe Fourier-Koeffizienten $c_k = c_{-k} = a_k/2$

$$c_0 = \frac{3}{8}, \quad c_{\pm 1} = \frac{3}{8}, \quad c_{\pm 2} = -\frac{1}{4}, \quad c_{\pm 3} = \frac{1}{8}, \quad c_{\pm 4} = \frac{1}{16}$$

komplexe Fourier-Reihe

$$f(x) = \frac{3}{8} + \frac{3}{8}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \frac{3}{8}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x} + \frac{1}{8}\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x} + \frac{1}{8}\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x} + \frac{1}{16}\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x} + \frac{1}{16}\mathrm{e}^{-4\mathrm{i}x}$$

alternative Herleitung mit Hilfe der Formeln von Euler-Moivre

$$\cos x = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right), \quad \sin x = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)$$