# Verschiebung bei Fourier-Transformation

Eine Verschiebung der Variablen entspricht nach Fourier-Transformation bzw. Rücktransformation einer Multiplikation mit einer Exponentialfunktion:

$$\begin{aligned} f(x-a) \quad &\overset{\mathcal{F}}{\longmapsto} \quad \exp(-\mathrm{i}ay)\hat{f}(y) \\ \exp(\mathrm{i}ax)f(x) \quad &\overset{\mathcal{F}}{\longmapsto} \quad \hat{f}(y-a)\,. \end{aligned}$$

# Beweis:

(i) Verschiebung:
$g(x) = f(x-a)$, $\tilde{x} = x - a \quad \rightsquigarrow$

$$\hat{g}(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x-a)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}yx}\, dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\tilde{x})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y(\tilde{x}+a)}\, d\tilde{x} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}ya}\hat{f}(y)$$

(i) Multiplikation mit Exponentialfunktionen:
$h(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}ax} f(x) \quad \rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} \hat{h}(y) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax} f(x))\mathrm{e}^{-\mathrm{i}yx}\, dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(y-a)x}\, dx \\ &= \hat{f}(y-a) \end{aligned}$$

# Beispiel:

Impuls-Funktion

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1/2 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad , \quad \hat{\chi}(y) = \operatorname{sinc}(y/2) = \frac{\sin(y/2)}{y/2}$$

Fourier-Transformation von $\chi(x - j)$:

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}jy} \operatorname{sinc}(y/2)$$

Fourier-Transformation von $\exp(2\pi \mathrm{i} jx)\chi(x)$

$$\hat{\chi}(y - 2\pi j) = \frac{\sin(y/2 - \pi j)}{y/2 - \pi j} = \frac{(-1)^j \sin(y/2)}{y/2 - \pi j}$$

$\rightsquigarrow$ Fourier-Transformation eines trigonometrischen Polynoms

$$p(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} c_j e^{2\pi i j x}$$

eingeschränkt auf $[-1/2, 1/2]$

$$(p\chi)(x) \quad \overset{\mathcal{F}}{\longmapsto} \quad \sin(y/2) \sum_{j\in\mathbb{Z}} \frac{c_j(-1)^j}{y/2 - \pi j}$$