Transformation des Periodizitätsintervalls bei Fourier-Reihen

Die Fourier-Reihe einer h-periodischen Funktion f erhält man durch lineare Transformation auf das Intervall $[-\pi, \pi]$.
Alternativ lassen sich die Fourier-Koeffizienten auch direkt berechnen:

$$f(x) \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \, e^{2\pi \mathrm{i} kx/h}$$

mit

$$c_k = \frac{1}{h} \int_0^h f(t) e^{-2\pi \mathrm{i} kt/h} \, dt \, .$$

Entsprechend erhält man für eine reelle Fourier-Reihe

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2\pi kx/h) + b_k \sin(2\pi kx/h)$$

die Koeffizienten

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{h}\int_0^h f(t)\cos(2\pi kt/h)\,dt, \quad k \geq 0\,, \\ b_k &= \frac{2}{h}\int_0^h f(t)\sin(2\pi kt/h)\,dt, \quad k \geq 1\,. \end{aligned}$$

Beispiel:

reelle Fourier-Reihe der *h*-periodischen Fortsetzung der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, a) \\ 0, & x \in [a, h) \end{cases}$$

mit $0 < a < h$

- Kosinus-Koeffizienten:

$$a_0 = \frac{2}{h} \int_0^a dt = \frac{2a}{h}$$

$k \geq 1$

$$a_k = \frac{2}{h} \int_0^a \cos(2\pi kt/h)\, dt = \frac{2}{h} \left[\frac{h \sin(2\pi kt/h)}{2\pi k} \right]_0^a = \frac{\sin(2\pi ka/h)}{\pi k}$$

- Sinus-Koeffizienten:

$$b_k = \frac{2}{h}\int\limits_0^a \sin(2\pi kt/h)\,dt = \frac{2}{h}\left[-\frac{h\cos(2\pi kt/h)}{2\pi k}\right]_0^a = \frac{1-\cos(2\pi ka/h)}{\pi k}$$

Fourier-Reihe

$$f(x) \sim \frac{a}{h} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi ka/h)}{\pi k}\cos(2\pi kx/h) + \frac{1-\cos(2\pi ka/h)}{\pi k}\sin(2\pi kx/h)$$