Skalierung bei Fourier-Transformation

Für $a \neq 0$ gilt

$$f(ax) \quad \stackrel{\mathcal{F}}{\longmapsto} \quad \hat{f}(y/a)/|a|\,.$$

Beweis:

$g(x) = f(ax)$, $\tilde{x} = ax$, $d\tilde{x} = a\,dx \quad \rightsquigarrow$

$$\hat{g}(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(ax)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}yx}\,dx = \frac{1}{a}\int\limits_{-s\infty}^{s\infty} f(\tilde{x})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\tilde{x}y/a}\,d\tilde{x} = \frac{1}{|a|}\hat{f}(y/a)$$

mit $s = \operatorname{sign}(a)$
Umkehrung der Integrationsgrenzen für $a < 0$ $(s = -1)$

$$\int_{\infty}^{-\infty} \ldots\, d\tilde{x} = -\int_{-\infty}^{\infty} \ldots\, d\tilde{x}$$

Beispiel:

Fourier-Transformierte der Funktion

$$f(x) = \mathrm{e}^{-a(x-b)^2}$$

verwende

$$g(x) = \mathrm{e}^{-x^2/2} \quad \stackrel{\mathcal{F}}{\longmapsto} \quad \hat{g}(y) = \sqrt{2\pi}\mathrm{e}^{-y^2/2}$$

Skalierung von $g(x)$ mit $\sqrt{2a}$, d.h. $h(x) = g(\sqrt{2a}x) \quad \rightsquigarrow$

$$h(x) = \mathrm{e}^{-ax^2}, \quad \hat{h}(y) = \sqrt{\pi/a}\,\mathrm{e}^{-y^2/(4a)}$$

Verschiebung um b nach rechts, d.h. $f(x) = h(x-b) \quad \rightsquigarrow$

$$\hat{f}(y) = \sqrt{\pi/a}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}by}\,\mathrm{e}^{-y^2/(4a)}$$