Satz von Plancherel

Bis auf einen Normierungsfaktor lässt die Fourier-Transformation das Skalarprodukt und damit auch die Norm auf $L^2(\mathbb{R})$ invariant:

$$2\pi \langle f, g \rangle = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle, \quad \sqrt{2\pi}\, \|f\| = \|\hat{f}\|\,.$$

Aufgrund dieser Eigenschaft kann die Fourier-Transformation auf $L^2(\mathbb{R})$ durch einen Grenzprozess definiert werden. Für eine quadratintegrierbare Funktion f wählt man eine approximierende Folge glatter Funktionen f_n mit kompaktem Träger ($\|f - f_n\| \to 0$) und definiert

$$\hat{f} = \lim_{n\to\infty} \hat{f}_n\,.$$

Beweis:

formale Begründung:

wähle f als die inverse Fourier-Transformation einer Funktion h $\rightsquigarrow$

$$2\pi\,\langle f, g\rangle = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(y)\overline{g(x)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}yx}\,dy\,dx$$

Vertauschung der Integrationsreihenfolge $\rightsquigarrow$

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(y) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \overline{g(x)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}yx}\,dx}_{=\overline{\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}yx}\,dx}}\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} h(y)\overline{\hat{g}(y)}\,dy = \langle \hat{f}, \hat{g}\rangle$$

Beispiel:

Gauß-Funktion

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x^2/2}, \quad \hat{f}(y) = \sqrt{2\pi}\mathrm{e}^{-y^2/2}$$

Illustation der Identität von Plancherel:

$$\|\hat{f}\|^2 = \langle \hat{f}, \hat{f} \rangle = \langle \sqrt{2\pi} f, \sqrt{2\pi} f \rangle = 2\pi \, \|f\|^2$$

Wert der Norm

$$\|f\|^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2/2}\overline{\mathrm{e}^{-x^2/2}}\, dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$$

Beispiel:

$$f(x) = \mathrm{e}^{-|x|}, \quad \hat{f}(y) = \frac{2}{1+y^2}$$

Illustration der Identität von Plancherel:

$$\begin{aligned} \|f\|^2 &= 2\int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-2x}\,dx = \left[-\mathrm{e}^{-2x}\right]_0^\infty = 1 \\ \|\hat{f}\|^2 &= \int\limits_{-\infty}^\infty \frac{4}{(1+y^2)^2}\,dy = \left[\frac{2y}{1+y^2} + 2\arctan(y)\right]_{-\infty}^\infty = 2\pi \end{aligned}$$

Berechnung des Integrals mit Partialbruchzerlegung

Kontrolle:

$$\frac{d}{dy}[\ldots] = \frac{2(1+y^2) - 4y^2}{(1+y^2)^2} + \frac{2}{1+y^2} = \frac{4}{(1+y^2)^2} \quad \checkmark$$

Beispiel:

Berechnung des Integrals

$$I = \int_0^\infty \frac{\cos(y)\sin(y/2)}{4y + 9y^3}\, dy$$

Formel von Euler-Moivre $\quad\rightsquigarrow$

$$\int_0^\infty \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} \underbrace{\frac{\sin(y/2)}{4y\left(1 + \left(\frac{3}{2}\, y\right)^2\right)}}_{\text{gerade Funktion}} dy = \frac{1}{32} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{1 + \left(\frac{3}{2} y\right)^2} \frac{e^{iy} \sin(y/2)}{(y/2)}\, dy$$

setze

$$\begin{aligned} \hat{f}(y) &= \frac{2}{1 + y^2}, \quad f(x) = e^{-|x|} \\ \hat{g}(y) &= \operatorname{sinc}(y/2), \quad g(x) = \begin{cases} 1, & |x| \le 1/2 \\ 0, & |x| > 1/2 \end{cases} \end{aligned}$$

Satz von Plancherel, Skalierungsformel $\quad\Longrightarrow$

$$I = \frac{1}{32}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{f}\left(\frac{3}{2}y\right)\overline{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y}\hat{g}(y)}\,dy = \frac{2\pi}{32}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{3}f\left(\frac{2}{3}x\right)\overline{g(x-1)}\,dx$$

Einsetzen mit $g(\cdot - 1)$ der charakteristischen Funktion von $[1/2, 3/2]$ (Verschiebung um 1 nach rechts) $\quad\rightsquigarrow$

$$I = \frac{\pi}{24}\int\limits_{1/2}^{3/2} \mathrm{e}^{-\frac{2}{3}|x|}\,dx = -\frac{\pi}{16}\left[\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}x}\right]_{1/2}^{3/2} = \frac{\pi}{16}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{\mathrm{e}}} - \frac{1}{\mathrm{e}}\right)$$