Rekonstruktionssatz

Hat f Bandbreite h, d.h. ist

$$\hat{f}(y) = 0, \quad |y| > h\,,$$

und ist $\hat{f}$ quadratintegrierbar, dann gilt

$$f(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} f(j\pi/h)\,\mathrm{sinc}(hx - j\pi)$$

mit $\mathrm{sinc}(t) = \sin t/t$.
Funktionen mit endlicher Bandbreite können also aus ihren Werten auf einem genügend feinen Gitter rekonstruiert werden.

Beweis:

(i) $\quad h = \pi$:

Darstellung von $\hat{f}$ als Produkt einer Fourier-Reihe mit der charakteristischen Funktion χ des Intervalls $[-\pi, \pi]$:

$$\hat{f}(y) = \left(\sum_j c_j \mathrm{e}^{\mathrm{i}jy} \right) \chi(y), \quad c_j = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}(y) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}jy}\, dy$$

Bandbreite von f gleich π

$\Longrightarrow$ Übereinstimmung von c_j mit der inversen Fourier-Transformation:

$$c_j = f(-j)$$

$\mathrm{e}^{\mathrm{i}jy}\chi(y)$: Fourier-Transformation von $\operatorname{sinc}(\pi(x+j))$ $\quad \Longrightarrow$

$$f(x) = \left(\left(\mathcal{F}^{-1} \sum_j f(-j) \mathrm{e}^{\mathrm{i}j\cdot} \chi \right) \right)(x) = \sum_j f(-j) \operatorname{sinc}(\pi(x+j))$$

Substitution $j \leftarrow -j \quad \rightsquigarrow \quad$ gewünschte Identität

(ii) h beliebig:
Bandbreite von f gleich h $\implies$ Bandbreite von $g(x) = f(x\,\pi/h)$ gleich π, denn

$$\hat{g}(y) = (h/\pi)\hat{f}(y\,h/\pi)$$

Teil (i) $\implies$

$$f(x\,\pi/h) = g(x) = \sum_j g(j)\,\mathrm{sinc}(\pi(x-j)), \quad g(j) = f(j\,\pi/h)$$

Substitution $x \leftarrow x\,h/\pi$ $\rightsquigarrow$ allgemeine Rekonstruktionsformel

Details: inverse Fourier-Transformation von $\mathrm{e}^{\mathrm{i}jy}\chi(y)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}xy}\mathrm{e}^{\mathrm{i}jy}\,dy &= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+j)y}}{\mathrm{i}(x+j)}\right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi}\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+j)\pi} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(x+j)\pi}}{\mathrm{i}(x+j)} = \frac{\sin(\pi(x+j))}{\pi(x+j)} \end{aligned}$$

Beispiel:

$$f(x) = \operatorname{sinc}(ax) = \frac{\sin(ax)}{ax}, \quad \hat{f}(y) = \begin{cases} \pi/a, & |y| < a \\ 0, & |y| > a \end{cases}$$

Bandbreite $h = 1$ für $0 < a \leq 1$
Rekonstruktionssatz mit $h = 1 \quad \Longrightarrow$

$$\operatorname{sinc}(ax) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}(aj\pi) \operatorname{sinc}(x - j\pi)$$

(i) $\quad a = 1$:

$$\operatorname{sinc}(j\pi) = \begin{cases} 1, & j = 0 \\ 0, & j \neq 0 \end{cases}$$

$\leadsto$ triviale Identität

(ii) $a = 1/2,\ x = \pi/2$:

$$\frac{\sin(\pi/4)}{\pi/4} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \quad = \quad \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(j\pi/2)}{j\pi/2}\,\frac{\sin(\pi/2 - j\pi)}{\pi/2 - j\pi}$$

Summand für $j = 0$: $\operatorname{sinc}(0)\,\sin(\pi/2)/(\pi/2) = 2/\pi$
Summanden für gerades j null
Summanden für $j = 2k+1$:

$$\frac{\sin(k\pi + \pi/2)\sin(\pi/2 - 2k\pi - \pi)}{(2k+1)(\pi/2)(-4k-1)(\pi/2)} = \frac{4}{\pi^2}\,\frac{(-1)^k(-1)}{(2k+1)(-4k-1)}$$

$\rightsquigarrow$ Wert der Summe

$$\frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)(4k+1)}$$