Orthogonalität von Kosinus und Sinus

Die Funktionen

$$1\,,\quad \cos(kx)\,,\quad \sin(kx)\,,\quad k>0\,,$$

bilden ein Orthogonalsystem im Raum der quadratintegrierbaren 2π-periodischen Funktionen:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(jx)\cos(kx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(jx)\sin(\ell x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(jx)\sin(kx)\,dx = 0$$

für $j \neq k$ und

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(kx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(kx)\,dx = \pi$$

für $k > 0$.

Beweis:

(i) Orthogonalität von Kosinus-Funktionen:
Additionstheorem,

$$\frac{1}{2}\left(\cos\left((j-k)\,x\right)+\cos\left((j+k)\,x\right)\right)=\cos(jx)\cos(kx),\quad j\neq k$$

$\Longrightarrow$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos(jx)\cos(kx)\,dx=\frac{1}{2}\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos((j-k)x)\,dx+\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos((j+k)x)\,dx\right)$$

Stammfunktionen $c\sin(\ldots)$ verschwinden bei $\pm\pi$
$\rightsquigarrow \quad \int\ldots=0$

(ii) Orthogonalität von Kosinus und Sinus:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos(jx)\sin(\ell x)\,dx=0\,,$$

da Integral einer ungeraden Funktion über symmetrisches Intervall

(iii) Orthogonalität von Sinus-Funktionen:
partielle Integration $\Longrightarrow$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(jx)\sin(kx)\,dx = \frac{j}{k}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(jx)\cos(kx)\,dx$$

null nach (i)

(iv) Normierung von Kosinus und Sinus:
partielle Integration $\Longrightarrow$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(kx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(kx)\,dx$$

Summe der Integrale gleich 2π wegen $\cos^2 + \sin^2 = 1$
$\Longrightarrow$ gemeinsamer Wert π

Reelle Fourier-Reihe

Die reelle Fourier-Reihe einer reellen 2π-periodischen Funktion f ist die Entwicklung nach dem Orthogonalsystem der Kosinus- und Sinusfunktionen:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

mit

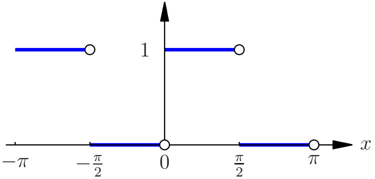
$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt)\, dt, \quad k \geq 0\,, \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt)\, dt, \quad k \geq 1\,. \end{aligned}$$

Die Art der Konvergenz der Reihe hängt von der Glattheit von f ab. Hinreichend für absolute Konvergenz ist beispielsweise, dass die Fourier-Koeffizienten a_k und b_k absolut konvergente Reihen bilden.

Auch eine konvergente Fourier-Reihe muss nicht an allen Stellen den Funktionswert als Grenzwert haben. An Unstetigkeitsstellen konvergiert die Reihe meist gegen den Mittelwert aus rechtsseitigem und linksseitigem Funktionsgrenzwert. Daher wird im Allgemeinen $f(x) \sim \sum \cdots$ statt $f(x) = \sum \cdots$ geschrieben.

Beispiel:

reelle Fourier-Reihe der 2π-periodischen Fortsetzung der Funktion



$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-\pi, -\pi/2) \cup [0, \pi/2) \\ 0, & x \in [-\pi/2, 0) \cup [\pi/2, \pi) \end{cases}$$

(i) Kosinus-Koeffizienten:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$k \geq 1$: Kosinus gerade $\quad \Longrightarrow$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{-\pi/2} \cos(kt)\,dt + \int_0^{\pi/2} \cos(kt)\,dt\right) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(kt)\,dt = 0$$

(ii) Sinus-Koeffizienten:

$$
\begin{aligned}
b_k &= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{-\pi/2} \sin(kt)\,dt + \int_{0}^{\pi/2} \sin(kt)\,dt\right)\\
&= \frac{1}{\pi}\left(\left[-\frac{\cos(kt)}{k}\right]_{-\pi}^{-\pi/2} + \left[-\frac{\cos(kt)}{k}\right]_{0}^{\pi/2}\right)\\
&= \frac{1}{k\pi}\left(-2\cos(k\pi/2) + (-1)^k + 1\right)
\end{aligned}
$$

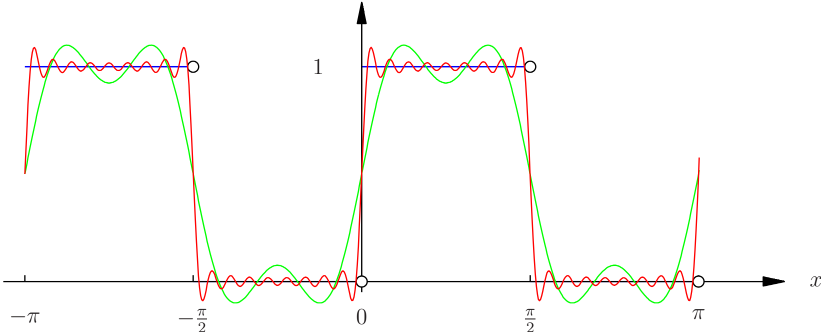
k ungerade: $b_k = 0$
$k = 4m$: $b_{4m} = 0$
$k = 4m+2$: $b_{4m+2} = 4/((4m+2)\pi)$
(iii) Fourier-Reihe von f:

$$
\frac{1}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin\left((4m+2)x\right)}{4m+2} = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(6x)}{6} + \cdots\right)
$$

Partialsummen

$$\frac{1}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{n} \frac{\sin((4m+2)x)}{4m+2}$$

für $n = 2$ und $n = 8$



f unstetig $\quad \rightsquigarrow \quad$ langsame Konvergenz
Gibbsches Phänomen: Überschwingungen in der Nähe der Sprungstellen