Quadratintegrierbare Funktionen

Für ein Gebiet $D \subset \mathbb{R}^n$ bezeichnet $L^2(D)$ den Raum der Funktionen $f: \; D \to \mathbb{C}$ mit

$$\int\limits_D |f(x)|^2 \, dx < \infty$$

und der durch das Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int\limits_D f(x) \overline{g(x)} \, dx$$

induzierten Norm $\| \cdot \|$.
Alternativ kann $L^2(D)$ auch als Abschluss der glatten Funktionen definiert werden, d.h. jede quadratintegrierbare Funktion lässt sich durch eine Folge unendlich oft differenzierbarer Funktionen f_n approximieren:

$$\|f - f_n\| \to 0, \quad n \to \infty \,.$$

Beispiel:

radiale Funktion

$$f(x) = |x|^s$$

(i) $D = \{x \in \mathbb{R}^n : \; r = |x| < 1\}$ (n-dimensionale Einheitskugel):

$$\int\limits_D |f(x)|^2 \, dx \underset{\text{Kugelkoord.}}{=} c \int\limits_0^1 r^{2s} r^{n-1} \, dr$$

$\Longrightarrow$ f quadratintegrierbar für $2s > -n$ mit Wert $c/(2s+n)$

(ii) $\tilde{D} = \{x \in \mathbb{R}^n : \; r = |x| > 1\}$ (Komplement der Einheitskugel):

$$\|f\|_2^2 = \int\limits_{\tilde{D}} |x|^{2s} \, dx = c \int\limits_1^\infty r^{2s} r^{n-1} \, dr$$

$\Longrightarrow$ f quadratintegrierbar für $2s < -n$ mit Wert $-c/(2s+n)$