Parseval-Identität

Die Norm einer 2π-periodischen quadratintegrierbaren Funktion f lässt sich durch die Fourier-Koeffizienten

$$c_k = \langle f, e_k \rangle_{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt} \, dt$$

ausdrücken:

$$\|f\|_{2\pi}^2 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \, dt = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 \, .$$

Entsprechend gilt für die Kosinus- und Sinus-Koeffizienten einer reellen Funktion f

$$\|f\|_{2\pi}^2 = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k^2 + b_k^2 \right) \, .$$

Beweis:

Konvergenz der Fourier-Reihe:

$$\|f - p_n f\|_{2\pi}^2 \to 0, \quad n \to \infty$$

$\implies$

$$\begin{aligned} \|f\|_{2\pi}^2 &= \lim_{n\to\infty} \|p_n f\|_{2\pi}^2 = \lim_{n\to\infty} \left\langle \sum_{|k|\le n} c_k e_k, \sum_{|j|\le n} c_j e_j \right\rangle_{2\pi} \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{|k|\le n} |c_k|^2 \end{aligned}$$

da $\langle e_k, e_j\rangle_{2\pi} = \delta_{k,j}$

Analoge Argumentation im reellen Fall aufgrund der Orthogonalität der Kosinus- und Sinusfunktionen und der Normierung

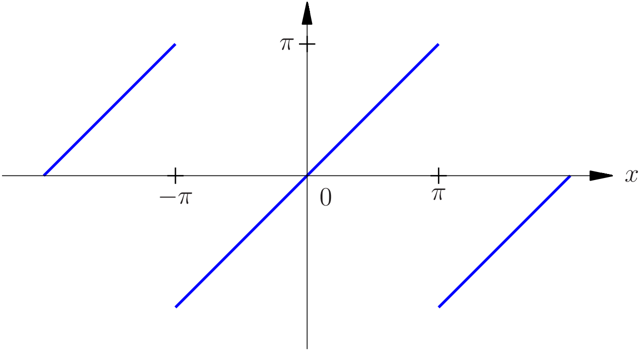
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(kx)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(kx)\,dx = \frac{1}{2}$$

Beispiel:

$$f(x) = x, \quad x \in [-\pi, \pi)\,, \quad f(x + 2\pi) = f(x)$$

Fourier-Reihe

$$f(x) \sim \sum_{k \neq 0} \underbrace{\frac{\mathrm{i}(-1)^k}{k}}_{=c_k} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$$



Norm

$$\|f\|_{2\pi}^2 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} x^2 \, dx = \frac{\pi^2}{3}$$

Parseval-Identität $\implies$

$$\|f\|_{2\pi}^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2 = \sum_{k\neq 0} \left| \mathrm{i}\frac{(-1)^k}{k} \right|^2 = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

$\rightsquigarrow$ Identität

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots$$