Konvergenzrate der Fourier-Projektion

Der Fehler der Fourier-Projektion lässt sich für periodische Funktionen mit quadratintegrierbarer k-ter Ableitung durch

$$\|f - p_n f\|_{2\pi} \leq (n+1)^{-k} \|f^{(k)}\|_{2\pi}$$

abschätzen.
Für $f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)x}$ ist die Ungleichung scharf.

Beweis:

Fourier-Reihe

$$f(x) \sim \sum_{j\in\mathbb{Z}} c_j \mathrm{e}^{\mathrm{i}jx}$$

Fourier-Reihe der k-ten Ableitung

$$f^{(k)}(x) \sim \sum_{j\in\mathbb{Z}} c_j (\mathrm{i}j)^k \mathrm{e}^{\mathrm{i}jx}$$

Parseval-Identität

$$\|f^{(k)}\|_{2\pi}^2 = \sum_{j\in\mathbb{Z}} |c_j|^2 |j|^{2k}$$

$\Longrightarrow$

$$\|f - p_n f\|_{2\pi}^2 = \sum_{|j|>n} |c_j|^2 \leq \sum_{j\in\mathbb{Z}} |c_j|^2 \frac{|j|^{2k}}{(n+1)^{2k}} = (n+1)^{-2k} \|f^{(k)}\|_{2\pi}^2$$

Spezialfall $g(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)x}$:

$$c_{n+1} = 1, c_j = 0 \text{ für } j \neq n+1, \quad g^{(k)}(x) = (\mathrm{i}(n+1))^k \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)x}$$

$\leadsto$ Gleichheit in der Fehlerabschätzung, denn $p_n g = 0 \quad \Longrightarrow$

$$\|g - p_n g\|_{2\pi}^2 = \|g\|_{2\pi}^2 = \|(\mathrm{i}(n+1))^{-k} g^{(k)}\|_{2\pi}^2 = (n+1)^{-2k} \|g^{(k)}\|_{2\pi}^2$$