Konvergenz im Mittel bei Fourier-Reihen

Für eine quadratintegrierbare Funktion f konvergiert die Fourier-Reihe

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\, e_k, \quad e_k(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}, \quad c_k = \langle f, e_k\rangle_{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\, dt\,,$$

in der Norm $\|\cdot\|_{2\pi}$, d.h. für die Partialsummen gilt

$$\|f - p_n f\|_{2\pi}^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - (p_n f)(x)|^2\, dx \to 0$$

für $n \to \infty$.

Beweis:

(i) Analyse der Konvergenz für glatte 2π-periodische Funktionen g:
Darstellung der Fourier-Projektion mit dem Dirichlet-Kern:

$$(p_n g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} q_n(x-t) g(t)\, dt, \quad q_n(\xi) = \frac{\sin\left((n+1/2)\xi\right)}{\sin(\xi/2)}$$

$$\xi = x - t,\ \int_{-\pi}^{\pi} q_n = \int\limits_{-\pi}^{\pi} 1 + \sum_{1 \le |k| \le n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\xi}\, d\xi = 2\pi \quad \rightsquigarrow$$

$$g(x) - (p_n g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin((n+1/2)\xi)\, \underbrace{\frac{g(x) - g(x-\xi)}{\sin(\xi/2)}}_{=h(x,\xi)}\, d\xi$$

g zweimal stetig differenzierbar $\stackrel{\text{l'Hospital}}{\longrightarrow}$ h mindestens einmal stetig differenzierbar

$$
\begin{aligned}
&|g(x) - (p_n g)(x)| \\
&\underset{\text{part. Int.}}{=} \left| \left[-\frac{\cos((n+1/2)\xi)}{2\pi(n+1/2)} h(x,\xi) \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos((n+1/2)\xi)}{n+1/2} h_\xi(x \right. \\
&\le \frac{1}{\pi n} \max_{x,\xi} |h(x,\xi)| + \frac{1}{n} \max_{x,\xi} |h_\xi(x,\xi)|
\end{aligned}
$$

$\to 0$ für $n \to \infty$

(ii) Konvergenz für beliebiges periodisches quadratintegrierbares f:
$\forall f\ \exists$ Folge glatter approximierender periodischer Funktionen g_m, d.h.

$$\|f - g_m\|_{2\pi} \to 0, \quad m \to \infty$$

Dreiecksungleichung $\quad\rightsquigarrow\quad$ Fehlerabschätzung

$$\begin{aligned} \|f - p_n f\|_{2\pi} &= \|(f - g_m) + (g_m - p_n g_m) + (p_n(g_m - f))\|_{2\pi} \\ &\le \|f - g_m\|_{2\pi} + \|g_m - p_n g_m\|_{2\pi} + \|p_n(g_m - f)\|_{2\pi} \end{aligned}$$

wähle, für gegebenes $\varepsilon > 0$, m so, dass

$$\|f - g_m\|_{2\pi} \le \varepsilon/3$$

Beschränktheit der Fourier-Projektion $\quad\Longrightarrow$

$$\|p_n(g_m - f)\|_{2\pi} \le \|g_m - f\|_{2\pi} \le \varepsilon/3$$

Konvergenz der Fourier-Projektion für glatte Funktionen $\quad\Longrightarrow$

$$\exists n_\varepsilon : \quad \|g_m - p_n g_m\|_{2\pi} < \varepsilon/3, \quad n > n_\varepsilon$$