Fourier-Transformation

Existiert zu einer Funktion f das Parameterintegral

$$\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}yx} \, dx$$

für alle $y \in \mathbb{R}$, so heißt f Fourier-transformierbar und die Funktion $\hat{f}$ Fourier-Transformierte von f.
Man schreibt

$$\hat{f} = \mathcal{F} f \,, \quad \text{bzw.} \quad f(x) \quad \stackrel{\mathcal{F}}{\longmapsto} \quad \hat{f}(y) \,.$$

Entsprechend ist die inverse Fourier-Transformation $\mathcal{F}^{-1}$ durch

$$\hat{f}(y) \quad \overset{\mathcal{F}^{-1}}{\longmapsto} \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y) \mathrm{e}^{\mathrm{i}yx} \, dy \,,$$

definiert und es gilt

$$f = \mathcal{F}^{-1} \mathcal{F} f$$

für absolut integrierbare, stetig differenzierbare Funktionen f.
Die Fourier-Transformation und die inverse Fourier-Transformation sind linear. Sie unterscheiden sich nur unwesentlich. Es ist

$$\mathcal{F} \bar{f} = 2\pi \overline{\mathcal{F}^{-1} f} \,.$$

Beweis:

Idee:
Fourier-Transformation als Grenzfall der Fourier-Reihe, d.h. eine kontinuierliche Entwicklung nach Exponentialfunktionen $e_k(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$
Annahme: $f = 0$ außerhalb von $[-h, h]$
Fourier-Reihe für $x \in [-h, h]$, Definition der Fourier-Transformation $\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} f(t) \overline{e_k(t\pi/h)}\, dt \right] e_k(x\pi/h) \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{\pi}{h} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k\pi/h) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k\pi/h)x} \end{aligned}$$

Riemann-Summe der inversen Fourier-Transformation
konvergent bei hinreichend glattem $\hat{f}$ für $\Delta y = \pi/h \to 0$

Beispiel:

Fourier-Transformation der Impuls-Funktion

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1/2 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Definition, Formel von Euler-Moivre $\quad \rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} \hat{\chi}(y) &= \int\limits_{-1/2}^{1/2} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}yx}\, dx = \left[\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}yx}}{-\mathrm{i}y}\right]_{-1/2}^{1/2} = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y/2} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}y/2}}{-\mathrm{i}y} \\ &= \frac{\sin(y/2)}{y/2} = \operatorname{sinc}(y/2) \end{aligned}$$

Beispiel:

Fourier-Transformation der Funktion

$$f(x) = \mathrm{e}^{-|x|}$$

Formel von Euler-Moivre $\implies$ $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy} = \cos(xy) - \mathrm{i}\sin(xy)$
f gerade $\implies$ $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(xy)\,dx = 0$ und

$$\begin{aligned}
\hat{f}(y) \quad &= \quad 2\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\cos(yx)\,dx \underset{\text{part. Int.}}{=} 0 + 2\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\frac{\sin(yx)}{y}\,dx \\
&\underset{\text{part. Int.}}{=} \quad 2\left[\mathrm{e}^{-x}\left(-\frac{\cos(yx)}{y^2}\right)\right]_0^\infty - 2\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\frac{\cos(yx)}{y^2}\,dx \\
&= \quad \frac{2}{y^2} - \frac{\hat{f}(y)}{y^2}
\end{aligned}$$

Umformung $\rightsquigarrow$ $\hat{f}(y) = 2/(1+y^2)$

Beispiel:

Die Gauß-Funktion ist eine Eigenfunktion der Fourier-Transformation:

$$f(x) = \exp(-x^2/2) \quad \Leftrightarrow \quad \hat{f}(y) = \sqrt{2\pi}\,\exp(-y^2/2)\,.$$

Definition $\quad \rightsquigarrow$

$$\hat{f}(y) = \exp(-y^2/2) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2/2 - \mathrm{i}yx + y^2/2)\,dx$$

setze

$$-z^2/2 = -(x+\mathrm{i}y)^2/2\,,\ \ dz = dx$$

Verschiebung des Integrationswegs (Komplexe Analysis),
$z \in \mathbb{R} + \mathrm{i}y \to z \in \mathbb{R} \quad \rightsquigarrow$

$$\hat{f}(y) = f(y) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(-z^2/2)\,dz = f(y)\sqrt{2\pi}$$