Fourier-Reihen von geraden und ungeraden Funktionen

Die Fourier-Reihe einer geraden 2π-periodischen Funktion f ist eine reine Kosinus-Reihe:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx)$$

mit

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos(kt)\, dt, \quad k \geq 0\,.$$

Entsprechend enthält die Fourier-Reihe einer ungeraden 2π-periodischen Funktion nur Sinus-Terme:

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx)$$

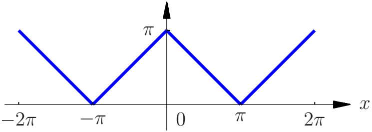
mit

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} f(t) \sin(kt)\, dt, \quad k \geq 1\,.$$

Beide Aussagen folgen unmittelbar aus der Definition der Fourier-Koeffizienten, da die entsprechenden Integrale aus Symmetriegründen null sind bzw. nur über eine Hälfte des Symmetrieintervalls integriert werden muss.

Beispiel:

Fourier-Reihe der 2π-periodischen Fortsetzung der geraden Hutfunktion



$$f(x) = \begin{cases} \pi + x, & x \in [-\pi, 0) \\ \pi - x, & x \in [0, \pi) \end{cases}$$

reine Kosinus-Reihe ($b_k = 0$)

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \pi - t \, dt = \pi$$

$k \geq 1:$

$$
\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}(\pi - t)\cos(kt)\,dt \\
&\overset{\text{part. Int.}}{=} \frac{2}{\pi}\left[(\pi - t)\frac{\sin(kt)}{k}\right]_0^{\pi} + \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin(kt)}{k}\,dt \\
&= 0 - \frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos(kt)}{k^2}\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{2}{k^2\pi}\left(1 - (-1)^k\right)
\end{aligned}
$$

$\Longrightarrow$ Koeffizienten mit geradem Index null und

$$a_{2m+1} = \frac{4}{(2m+1)^2\pi}$$

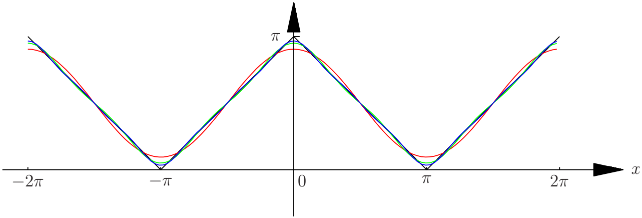
Fourier-Reihe:

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\cos((2m+1)x)}{(2m+1)^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos(x)}{1} + \frac{\cos(3x)}{9} + \cdots\right)$$

Spezialfall $x = 0$: $f(0) = \pi \quad \Longrightarrow$

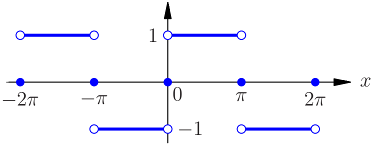
$$\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right)\frac{\pi}{4} = \frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1} + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \cdots$$

erste drei Partialsummen



Beispiel:

Fourier-Reihe der 2π-periodischen Fortsetzung der ungeraden Funktion



$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = -\pi \\ -1, & x \in (-\pi, 0) \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x \in (0, \pi) \end{cases}$$

reine Sinus-Reihe ($a_k = 0$)

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin(kt)\, dt = \frac{2}{\pi} \left[-\frac{\cos(kt)}{k} \right]_0^\pi = \frac{2}{k\pi} \left(1 - (-1)^k \right)$$

$\implies$ Koeffizienten mit geradem Index null und

$$b_{2m+1} = \frac{4}{(2m+1)\pi}$$

Fourier-Reihe:

$$f(x) \sim \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin((2m+1)x)}{2m+1} = \frac{4}{\pi} \left(\frac{\sin(x)}{1} + \frac{\sin(3x)}{3} + \cdots \right)$$

Spezialfall $x = \pi/2$: $f(\pi/2) = 1$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \mp \cdots$$

erste drei Partialsummen