Fourier-Basis aus Exponentialfunktionen

Die Exponentialfunktionen $e_k(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ sind im Raum der 2π-periodischen quadratintegrierbaren Funktionen orthonormal:

$$\langle e_j, e_k \rangle_{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} e_j(x) \overline{e_k(x)} \, dx = \delta_{j,k}$$

für $j, k \in \mathbb{Z}$.

Beweis:

$j = k$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}jx}\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}jx}}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}jx}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}jx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1\,dx = 1$$

$j \neq k$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}jx}\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(j-k)x}\,dx = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(j-k)x}}{\mathrm{i}(j-k)}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

denn $\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\ell} = 1$ für $\ell \in \mathbb{Z}$ $\quad\Longrightarrow$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\ell\pi} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\ell\pi} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\ell(-\pi)}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\ell(2\pi)} - 1\right) = 0$$

Fourier-Reihe

Die komplexe Fourier-Reihe einer 2π-periodischen Funktion f ist die Entwicklung nach dem Orthonormalsystem $e_k(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$:

$$f(x) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\, e_k(x), \quad c_k = \langle f, e_k\rangle_{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{e_k(t)}\, dt\,.$$

Die Konvergenz der Reihe hängt von der Glattheit von f bzw. dem Abfallverhalten der Fourier-Koeffizienten c_k ab.
Hinreichend für gleichmäßige Konvergenz ist $\sum_k |c_k| < \infty$.

Beispiel:

Fourier-Reihe der 2π-periodischen Funktion

$$f(x) = \frac{1}{2 - e^{ix}}$$

Umformung und Summenformel für eine geometrische Reihe $\quad \rightsquigarrow$

$$f(x) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1 - e^{ix}/2} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{e^{ix}}{2}\right)^k$$

$(|e^{ix}/2| < 1)$
Fourier-Reihe:

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} e^{ikx}$$