Faltung und Fourier-Transformation

Die Faltung zweier Funktionen,

$$(f \star g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)\,dt\,,$$

wird durch die Fourier-Transformation in ein Produkt überführt:

$$\widehat{f \star g} = \hat{f}\hat{g}\,.$$

Beweis:

formales Argument:
linke Seite

$$\widehat{f \star g}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}yx}\,dt\,dx$$

schreibe $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}yx} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}y(x-t)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}yt}$ und substituiere $z = x - t$, $dz = dx$
$\rightsquigarrow$ Integral in Produktform:

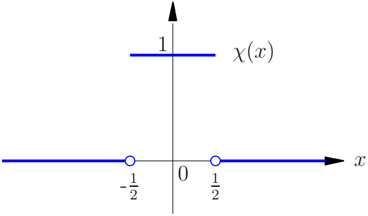
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}yz}\,dz \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}yt}\,dt$$

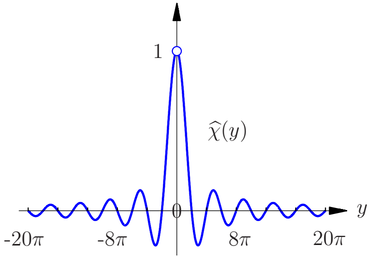
Übereinstimmung mit der rechten Seite

Beispiel:

Impuls-Funktion

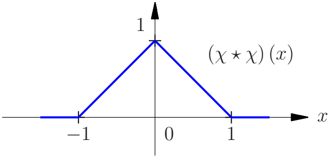
$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1/2 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \quad \hat{\chi}(y) = \frac{\sin(y/2)}{y/2} = \operatorname{sinc}(y/2)$$





Faltung von χ mit sich selbst

$$(\chi \star \chi)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi(x-t)\chi(t)\,dt = \int_{-1/2}^{1/2} \chi(x-t)\,dt = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ x+1, & -1 \le x < 0 \\ 1-x, & 0 \le x < 1 \\ 0, & x \ge 1 \end{cases}$$



Fourier-Transformation der sogenannten Hutfunktion $\chi \star \chi$:

$$\widehat{\chi \star \chi}(y) = \frac{\sin^2(y/2)}{y^2/4} = \operatorname{sinc}^2(y/2)$$

aufgrund der Faltungsformel