Fourier-Matrix

Durch Bilden von Potenzen der Einheitswurzel

$$w_n = \exp(2\pi \mathrm{i}/n)$$

erhält man die so genannte Fourier-Matrix

$$W_n = \begin{pmatrix} w_n^{0\cdot 0} & \cdots & w_n^{0\cdot(n-1)} \\ \vdots & & \vdots \\ w_n^{(n-1)\cdot 0} & \cdots & w_n^{(n-1)\cdot(n-1)} \end{pmatrix}.$$

Sie ist nach Normierung ($W_n \to W_n/\sqrt{n}$) unitär, d.h. $W_n^* W_n/n$ ist die Einheitsmatrix.

Beweis:

(i) Orthogonalität der Spalten:
komplexes Skalarprodukt der $(j+1)$-ten und $(k+1)$-ten Spalte

$$\sum_{\ell=0}^{n-1} w_n^{\ell j} \overline{w_n^{\ell k}} = \sum_{\ell} w_n^{(j-k)\ell} = \frac{w_n^{(j-k)n} - 1}{w_n^{j-k} - 1}$$

$w_n^n = 1 \quad \Longrightarrow$

$$\sum_{\ell=0}^{n-1} w_n^{\ell j} \overline{w_n^{\ell k}} = 0$$

(ii) Normierung:
$|w^{\ell k}| = 1 \quad \Longrightarrow \quad$ Norm der Spalten gleich $\sqrt{n}$

Beispiel:

$n = 4,\ w_n = \exp(2\pi \mathrm{i}/4) = \mathrm{i}$

$$W_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \mathrm{i} & -1 & -\mathrm{i} \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -\mathrm{i} & -1 & \mathrm{i} \end{pmatrix}$$

unitär nach Division durch 2, d.h.

$$\left(\frac{1}{2} W_4^*\right) \left(\frac{1}{2} W_4\right) = E$$

Symmetrie der Fourier-Matrix $\quad \Longrightarrow$

$$W_4^* = \overline{W_4}^{\mathrm{t}} = \overline{W_4}$$

Diskrete Fourier-Transformation

Die Multiplikation eines n-Vektors c mit der Fourier-Matrix W_n wird als diskrete Fourier-Transformation bezeichnet:

$$f = W_n c \quad \Leftrightarrow \quad c = \frac{1}{n} W_n^* f \,.$$

Definitionsgemäß ist also

$$f_j = \sum_{k=0}^{n-1} c_k w_n^{jk}, \quad j = 0, \ldots, n-1$$

$\Leftrightarrow$

$$c_k = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f_j w_n^{-kj}, \quad k = 0, \ldots, n-1$$

mit $w_n = \exp(2\pi \mathrm{i}/n)$, wobei die Vektoren c und f von 0 bis $n-1$ indiziert werden.

Die diskrete Fourier-Transformation entspricht der Auswertung des trigonometrischen Polynoms

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$$

an den Punkten $x_j = 2\pi j/n$: $f_j = p(x_j)$, $j = 0, \ldots, n-1$.

Die inverse Transformation kann als Riemann-Summe für die Fourier-Koeffizienten interpretiert werden:

$$\langle f, e_k \rangle_{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \, dx \approx \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(x_j) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx_j}$$

mit $x_j = 2\pi j/n$.
Diese Approximation ist für glatte periodische Funktionen und $n \gg |k|$ sehr genau.

Beispiel:

diskrete Fourier-Transformation des Vektors $c = (3,\ -2,\ 0,\ 1)^{\mathrm{t}}$:

Multiplikation mit der Fourier-Matrix $\quad\rightsquigarrow$

$$f = W_4 c = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \mathrm{i} & -1 & -\mathrm{i} \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -\mathrm{i} & -1 & \mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 - 3\mathrm{i} \\ 4 \\ 3 + 3\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

inverse Transformation (Multiplikation mit $W^*/4$):

$$c = \frac{1}{4} W_4^* f = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\mathrm{i} & -1 & \mathrm{i} \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & \mathrm{i} & -1 & -\mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 - 3\mathrm{i} \\ 4 \\ 3 + 3\mathrm{i} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 12 \\ -8 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$