Fourier-Projektion

Die Fourier-Projektion einer quadratintegrierbaren Funktion f,

$$p_n f = \sum_{|k|\le n} c_k\, e_k, \quad c_k = \langle f, e_k\rangle_{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\,dt\,,$$

ist die beste Approximation zu f in der durch das Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle_{2\pi}$ induzierten Norm $\|\cdot\|_{2\pi}$, d.h.

$$\|f - p_n f\|_{2\pi} = \min_{q=\sum\limits_{|k|\le n} d_k e_k} \|f - q\|_{2\pi}\,.$$

Darüber hinaus gilt $\|p_n f\|_{2\pi} \le \|f\|_{2\pi}$.

Beweis:

(i) Orthogonalität:

$$\langle f - p_n f, e_j \rangle_{2\pi} = 0, \quad |j| \leq n$$

unmittelbare Folge der Orthogonalität der Basis-Funktionen:

$$\langle p_n f, e_j \rangle_{2\pi} = \sum_{|k| \leq n} c_k \langle e_k, e_j \rangle_{2\pi} = \sum_{|k| \leq n} c_k \delta_{k,j} = c_j, \quad |j| \leq n$$

Subtraktion von $\langle f, e_j \rangle = c_j \quad \Longrightarrow \quad$ Behauptung

(ii) beste Approximation:
Fehler einer anderen Approximation $q = \sum_{|k| \leq n} d_k \, e_k$

$$\begin{aligned} \|f - q\|_{2\pi}^2 &= \|f - p_n f + p_n f - q\|_{2\pi}^2 \\ &= \|f - p_n f\|_{2\pi}^2 + \langle f - p_n f, r \rangle_{2\pi} + + \langle r, f - p_n f \rangle_{2\pi} + \|r\|_{2\pi}^2 \end{aligned}$$

mit $r = p_n f - q$
r Linearkombination von e_j, $|j| \leq n \quad \Longrightarrow$

$$\langle f - p_n f, r \rangle = 0 = \langle r, f - p_n f \rangle$$

und

$$\|f - q\|_{2\pi}^2 = \|f - p_n f\|_{2\pi}^2 + \|p_n f - q\|_{2\pi}^2$$

(iii) Normabschätzung:
$f - p_n f \perp p_n f$, Satz des Pythagoras $\implies$

$$\|f\|_{2\pi}^2 = \|f - p_n f\|_{2\pi}^2 + \|p_n f\|_{2\pi}^2 \,,$$

d.h. $\|p_n f\|_{2\pi} \leq \|f\|_{2\pi}$

Dirichlet-Kern

Die Fourier-Projektion

$$p_n f = \sum_{|k| \leq n} \langle f, e_k \rangle_{2\pi} e_k, \quad e_k(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx},$$

besitzt die Integraldarstellung

$$(p_n f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} q_n(x-t)\, f(t)\, dt,$$

mit

$$q_n(\xi) = \frac{\sin((n+1/2)\xi)}{\sin(\xi/2)},$$

d.h. $p_n f$ lässt sich als Faltung des sogenannten Dirichlet-Kerns q_n mit der Funktion f darstellen.

Beweis:

Definition des Skalarproduktes und der Projektion $\quad\rightsquigarrow$

$$p_n f(x) = \sum_{|k|\le n} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\,dt\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\sum_{|k|\le n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-t)}}_{q_n(x-t)} f(t)\,dt$$

setze $\xi = x - t$ und benutze

$$u^m + u^{m+1} + \cdots + u^n = \frac{u^{n+1} - u^m}{u-1}, \quad u \ne 1$$

$\rightsquigarrow$

$$q_n(\xi) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\xi} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\xi}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi} - 1} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1/2)\xi} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n+1/2)\xi}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi/2} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi/2}}$$

Formel von Euler-Moivre, $\sin t = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t})/(2\mathrm{i})$ $\quad\rightsquigarrow$

$$q_n(\xi) = \frac{\sin\left((n+1/2)\xi\right)}{\sin(\xi/2)}$$