Differentiation und Integration von Fourier-Reihen

Eine Fourier-Reihe kann gliedweise integriert und differenziert werden:

$$\int \sum_{k\neq 0} c_k e_k(x)\,dx = d_0 + \sum_{k\neq 0} d_k e_k(x), \quad d_k = (\mathrm{i}k)^{-1} c_k\,,$$

mit $d_0 \in \mathbb{R}$ bzw.

$$\frac{d}{dx} \sum_k d_k e_k(x) = \sum_{k\neq 0} c_k e_k(x), \quad c_k = (\mathrm{i}k) d_k\,,$$

mit $e_k(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$.
Dabei wird die Konvergenz der auftretenden Reihen vorausgesetzt.
Hinreichend dafür ist beispielsweise, dass die Beträge der Fourier-Koeffizienten quadratsummierbar sind:

$$\sum_k |c_k|^2 < \infty\,.$$

Ist das Absolutglied c_0 der Fourier-Reihe nicht null, so hat die Reihe keine periodische Stammfunktion und die gliedweise Integration liefert keine Fourier-Reihe mehr.

Beispiel:

Fourier-Reihe von

$$f(x) = |\sin x|$$

f gerade $\quad\rightsquigarrow\quad$ reine Kosinus-Reihe, $b_k = 0$ und

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin x \cos(kx)\, dx$$

zweimalige partielle Integration $\quad\rightsquigarrow$

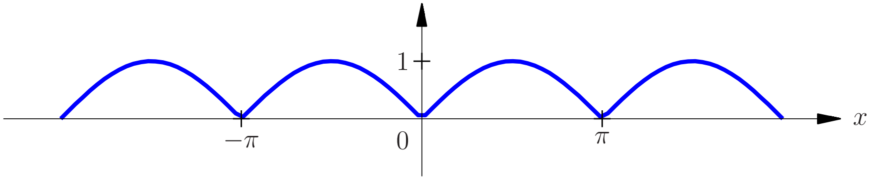
$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} a_k &= \left[\sin x \frac{\sin(kx)}{k}\right]_0^\pi - \int_0^\pi \cos x \frac{\sin(kx)}{k}\, dx \\ &= 0 + \left[\cos x \frac{\cos(kx)}{k^2}\right]_0^\pi + \underbrace{\frac{1}{k^2} \int_0^\pi \sin x \cos(kx)\, dx}_{=\frac{\pi}{2} a_k} \end{aligned}$$

Auflösen nach a_k $\quad \rightsquigarrow$

$$a_k = -\frac{2((-1)^k + 1)}{\pi(k^2 - 1)}$$

(gilt auch für a_0)
$a_k = 0$ für k ungerade, $c_{\pm k} = a_k/2 \quad \rightsquigarrow$

$$f(x) \sim -\frac{2}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{4k^2 - 1} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}kx} = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1} \cos(2kx)$$

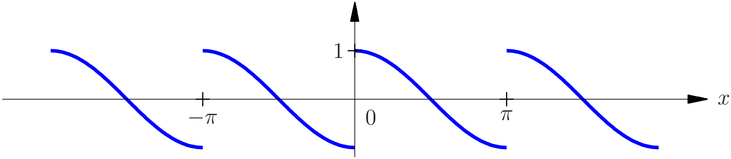


Fouier-Reihe der Ableitung

$$f'(x) = \operatorname{sign}(\sin x)\cos x$$

gliedweise Differentiation $\quad\rightsquigarrow$

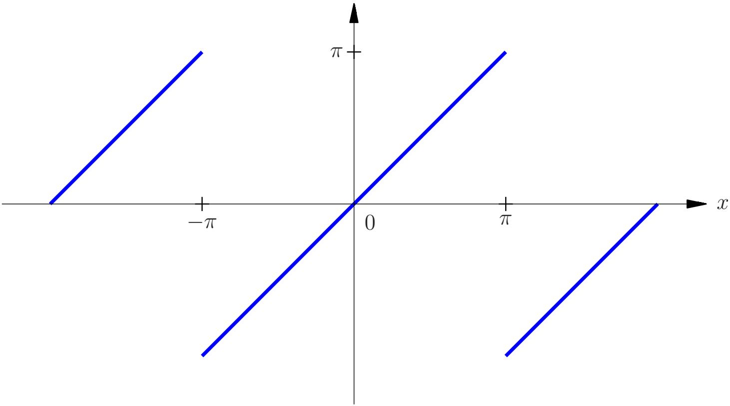
$$f'(x) \sim -\frac{2}{\pi}\sum_{k\neq 0}\frac{2\mathrm{i}k}{4k^2-1}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}kx} = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k}{4k^2-1}\sin(2kx)$$



Beispiel:

Fourier-Reihe der 2π-periodischen Fortsetzung der Funktion

$$f(x) = x, \quad x \in [-\pi, \pi)$$



f ungerade $\quad\rightsquigarrow\quad$ reine Sinus-Reihe, $a_k = 0$ und

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} x \sin(kx)\, dx$$

partielle Integration $\quad\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{\pi} \left[-x \frac{\cos(kx)}{k} \right]_0^{\pi} + \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} \frac{\cos(kx)}{k}\, dx \\ &= -2 \frac{(-1)^k}{k} + \frac{2}{\pi} \underbrace{\left[\frac{\sin(kx)}{k^2} \right]_0^{\pi}}_{=0} \end{aligned}$$

$c_{\pm k} = \mp \mathrm{i} b_k / 2 \quad\rightsquigarrow$

$$f(x) \sim \mathrm{i} \sum_{k \neq 0} \frac{(-1)^k}{k} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} = -2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \sin(kx)$$

2π-periodische Fortsetzung der Stammfunktion

$$F(x) = x^2/2, \quad x \in [-\pi, \pi)$$

gliedweise Integration, $d_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F = \pi^2/6 \quad \rightsquigarrow \quad$ Fourier-Reihe

$$F(x) \sim d_0 + \sum_{k \neq 0} \frac{(-1)^k}{k^2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} = \frac{\pi^2}{6} + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos(kx)$$

Einsetzen von $x = \pi \quad \rightsquigarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = (F(\pi) - d_0)/2 = \pi^2/6$