Differentiation bei Fourier-Transformation

Bei der Fourier-Transformation entspricht die Ableitung einer Multiplikation mit der transformierten Variablen und umgekehrt:

$$\begin{aligned} f'(x) \quad & \stackrel{\mathcal{F}}{\longmapsto} \quad \mathrm{i}y\hat{f}(y) \\ xf(x) \quad & \stackrel{\mathcal{F}}{\longmapsto} \quad \mathrm{i}\hat{f}\,'(y)\,. \end{aligned}$$

Beweis:

betrachte hinreichend schnell abfallende Funktionen

$\rightsquigarrow$ keine Randterme bei partieller Integration

(i) Differentiation von f:

$$\widehat{f'}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{-iyx}\, dx \underset{\text{part. Int.}}{=} 0 - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \underbrace{\frac{d}{dx} e^{-iyx}}_{-iye^{-iyx}}\, dx = iy\hat{f}(y)$$

(ii) Differentiation von $\hat{f}$:

$$i\hat{f}\,'(y) = i \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{d}{dy} e^{-iyx}\, dx = i \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(-ix) e^{-iyx}\, dx = \hat{g}(y)$$

mit $g(x) = xf(x)$

Abschwächung der Voraussetzungen mit Hilfsmitteln der Funktionalanalysis

Beispiel:

Fourier-Transformation der Gauß-Funktion

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x^2/2}, \quad \hat{f}(y) = \sqrt{2\pi}\, \mathrm{e}^{-y^2/2}$$

$$f'(x) = -x\mathrm{e}^{-x^2/2} = -xf(x)$$

Transformationsregeln $\implies$

$$\begin{array}{ccc} f'(x) & \overset{\mathcal{F}}{\longmapsto} & \mathrm{i}y\hat{f}(y) \\ -xf(x) & \overset{\mathcal{F}}{\longmapsto} & -\mathrm{i}\hat{f}'(y) \end{array}$$

identisches Resultat:

$$-\mathrm{i}\hat{f}'(y) = -\mathrm{i}\sqrt{2\pi}(-y)\,\mathrm{e}^{-y^2/2} = \mathrm{i}y\hat{f}(y)$$

mehrfache Anwendung der Transformationsregeln $\rightsquigarrow$
Fourier-Transformation von Funktionen der Form $p(x)\exp(-x^2/2)$ mit beliebigen Polynomen p

Beispiel:

$$f(x) = \mathrm{e}^{-|x|}, \quad \hat{f}(y) = \frac{2}{1+y^2}$$

Anwendung der Transformationsregeln:

$$\begin{aligned} f'(x) = -\operatorname{sign}(x)\mathrm{e}^{-|x|} \quad &\overset{\mathcal{F}}{\longmapsto} \quad \mathrm{i}y\hat{f}(y) = \frac{2\mathrm{i}y}{1+y^2} \\ x\mathrm{e}^{-|x|} \quad &\overset{\mathcal{F}}{\longmapsto} \quad \mathrm{i}\hat{f}\,'(y) = -\frac{4\mathrm{i}y}{(1+y^2)^2} \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ explizite Fourier-Transformation von Funktionen der Form $p(x)\exp(-|x|)$ mit beliebigen Polynomen p