Vertauschbarkeit partieller Ableitungen

Sind die ersten und zweiten partiellen Ableitungen einer Funktion $f : D \ni \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig, so gilt

$$\partial_j \partial_k f = \partial_k \partial_j f \,.$$

Für hinreichend glatte Funktionen ist also die Reihenfolge partieller Ableitungen vertauschbar. Insbesondere rechtfertigt dies die Multiindex-Schreibweise.

Angewandt auf die Komponenten gilt die Aussage ebenfalls für vektorwertige Funktionen $f : D \ni \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Beweis

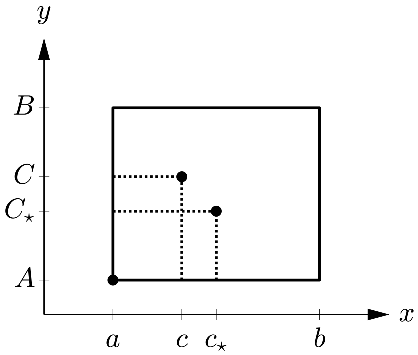
Variablen x_ℓ, $\ell \neq j, k$, irrelevant für die partielle Ableitungen ∂_j, ∂_k
$\rightsquigarrow$ betrachte o.B.d.A. eine bivariate Funktion $f(x, y)$
bezeichne mit

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x, B) - f(x, A), \\ h(y) &= f(b, y) - f(a, y) \end{aligned}$$

die Differenzen in y- bzw. x-Richtung und berechne

$$Q = f(b, B) - f(b, A) - f(a, B) + f(a, A)$$

mit Hilfe des eindimensionalen Mittelwertsatzes (MWS) auf zwei verschiedene Arten



$$
\begin{aligned}
Q &= [f(b,B) - f(b,A)] - [f(a,B) - f(a,A)] \\
&= g(b) - g(a) \\
&\underset{\text{MWS}}{=} (b-a)g_x(c) \\
&= (b-a)[f_x(c,B) - f_x(c,A)] \\
&\underset{\text{MWS}}{=} (b-a)(B-A)f_{xy}(c,C)
\end{aligned}
$$

für ein $c \in (a,b)$ und $C \in (A,B)$

$$
\begin{aligned}
Q &= [f(b,B) - f(a,B)] - [f(b,A) - f(a,A)] \\
&= h(B) - h(A) \\
&\underset{\text{MWS}}{=} (B-A)h_y(C^\star) \\
&= (B-A)[f_y(b,C^\star) - f_y(a,C^\star)] \\
&\underset{\text{MWS}}{=} (B-A)(b-a)f_{yx}(c^\star,C^\star)
\end{aligned}
$$

für ein $c^\star \in (a,b)$ und $C^\star \in (A,B)$

Gleichsetzen $\implies$

$$f_{xy}(c, C) = f_{yx}(c^\star, C^\star)$$

Verkleinerung des Rechtecks durch Grenzübergang ($b \to a$, $B \to A$) $\implies$

$$f_{xy}(a, A) = f_{yx}(a, A)$$

aufgrund der Stetigkeit der gemischten zweiten Ableitungen