Umkehrfunktion

Ist für eine stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \ni D \to \mathbb{R}^n$ die Jacobi-Matrix $f'(x_*)$ für einen Punkt x_* im Innern des Definitionsbereiches D nicht singulär, so ist f lokal invertierbar, d.h. f bildet eine Umgebung U von x_* bijektiv auf eine Umgebung V von $y_* = f(x_*)$ ab. Die Umkehrfunktion $g = f^{-1}$ ist auf V stetig differenzierbar, und es gilt

$$g'(y) = f'(x)^{-1}, \quad y = f(x) \iff x = g(y)\,,$$

für alle $y \in V$.

Man beachte, dass im Gegensatz zu einer univariaten Funktion aus der Invertierbarkeit von $f'(x)$ für alle x aus einer zusammenhängenden Menge D nicht notwendig die Injektivität auf dem gesamten Definitionsbereich folgt; eine globale Umkehrfunktion muss nicht existieren.

Beweis

(i) Wählt man o.B.d.A. die Umgebung U von x_* als eine offene Teilmenge von D, auf der f' nicht singulär ist (möglich aufgrund der Stetigkeit von $\det f'$), so genügt es, neben der lokalen Injektivität von f (Existenz von $g = f^{-1}$) die Differenzierbarkeit von g nur im Punkt y_* zu zeigen.

Begründung:

Existenz von $g'(y_*)$

$\implies$ Stetigkeit von g im Punkt y_*

Anwendung des Resultates für beliebige Punkte $x \in U$ an Stelle von x_*

$\implies$ Differenzierbarkeit von g an allen Punkten $y \in V = f(U)$

$\implies$ Stetigkeit von g auf V

Stetigkeit und Invertierbarkeit von f' auf U, Stetigkeit von g auf V

$\implies$ Stetigkeit von $g' : y \mapsto f'(g(y))^{-1}$

(ii) Invarianz des Resultates unter affinen Transformationen

$\rightsquigarrow$ Betrachtung von

$$p(x) = f'(x_*)^{-1}(f(x_* + x) - y_*)$$

an Stelle von f

$\rightsquigarrow$ vereinfachte Voraussetzungen:

$$p(O_n) = O_n, \text{ d.h. } x_*, y_* \to O_n = (0, \ldots, 0), \quad p'(O_n) = E$$

mit $O_n = (0, \ldots, 0)^{\mathrm{t}}$ und E der $n \times n$ Einheitsmatrix

Stetigkeit und Differenzierbarkeit im Punkt O_n $\implies$

(1) $\|p'(x) - E\| \le \varphi(\|x\|)$,

(2) $p(x) = x + R(x)$, $\|R(x)\| \le \|x\|\varphi(\|x\|)$

mit $\varphi(t) \searrow 0$ für $t \to 0$, d.h. $\varphi(t) = o(1)$

Verschiedene Funktionen φ in den Ungleichungen (1) und (2) können durch ihr Maximum, also eine gemeinsame Funktion, ersetzt werden.

(iii) Injektivität von p auf der Kugel $U : \|x\| < \delta$:
wähle δ so, dass $\varphi(\delta) < 1/2$
$x, \tilde{x} \in U$, $p(x) = p(\tilde{x})$, multivariater Mittelwertsatz $\implies$

$$\begin{aligned} 0 &= u(\tilde{x}) - u(x) = \int_0^1 \underbrace{p'((1-t)x + t\tilde{x})}_{(E+p'(x_t)-E)}(\tilde{x} - x)\,\mathrm{d}t \\ &= (\tilde{x} - x) + \int_0^1 (p'(x_t) - E)(\tilde{x} - x)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

und

$$\|\tilde{x} - x\| \le \|p'(x_t) - E\|\|\tilde{x} - x\| \underset{(1)}{=} \varphi(\|x_t\|)\|\tilde{x} - x\|$$

$$x_t \in U \quad \implies \quad \varphi(\|x_t\|) < \varphi(\delta) < 1/2 \quad \implies \quad \tilde{x} = x$$

(iv) $V = p(U)$ enthält die Kugel $B : \|y\| < \delta/4$, ist also eine Umgebung von O_n:
zeige dazu mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes, dass die Abbildung

$$S : x \mapsto x - p(x) + y$$

einen eindeutigen Fixpunkt in der Kugel $\tilde{B} : \|x\| \leq \delta/2$ besitzt, d.h. $\exists x$ mit $y = p(x)$

verifiziere die notwendigen Voraussetzungen:

- $S(\tilde{B}) \subseteq \tilde{B}$:

$$\begin{aligned} \|S(x)\| &= \|x - (\underbrace{x + R(x)}_{p(x)}) + y\| \underset{(2)}{\leq} \|x\|\varphi(\|x\|) + \|y\| \\ &\leq (\delta/2) \underbrace{\varphi(\delta/2)}_{\leq \varphi(\delta) < 1/2} + \delta/4 = \delta/2 \end{aligned}$$

- $\|S(\tilde{x}) - S(x)\| \leq c\|\tilde{x} - x\|$ mit $c < 1$:
  Abschätzung der Kontraktionskonstante durch $c = \max_{x \in \tilde{B}} \|S'\|$

$$S'(x) = E - p'(x) \quad \underset{(1)}{\Longrightarrow} \quad c = 1/2$$

(v) $q'(O_n) = E$, $q = p^{-1}$:
zu zeigen:

$$q(y) = \underbrace{q(O_n)}_{O_n} + y + \tilde{R}(y)$$

mit $\|\tilde{R}(y)\| = o(\|y\|)$ für $\|y\| \to 0$
$y = p(x) \quad \rightsquigarrow$

$$\tilde{R}(y) = q(y) - y = x - p(x) = -R(x) \underset{(2)}{=} o(\|x\|)$$

$\rightsquigarrow$ noch $\|x\|$ durch $\|y\|$ abzuschätzen:

$$\|y\| = \|p(x)\| = \|x + R(x)\| \underset{(2)}{\geq} \|x\| - \|x\|\varphi(\|x\|) \geq (1 - 1/2)\|x\|$$

für $y \in B$, $x \in \tilde{B}$

Beispiel

Lokale Invertierbarkeit der Funktion

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy \\ x/y \end{pmatrix}$$

im Punkt $(x_*, y_*) = (2, 1)$

Jacobi-Matrix

$$f'(x, y) = \begin{pmatrix} y & x \\ 1/y & -x/y^2 \end{pmatrix}$$

Einsetzen der konkreten Koordinaten

$$\mathrm{J} = f'(2, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$\det \mathrm{J} = -4 \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \exists$ Umkehrfunktion g in Umgebung von

$$\begin{pmatrix} u_* \\ v_* \end{pmatrix} = f(x_*, y_*) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Jacobi-Matrix im Punkt (u_*, v_*)

$$g'(2,2) = \mathrm{J}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

explizite Bestimmung von g durch Auflösen der Ausdrücke für u und v nach x und y:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = g(u,v) = \begin{pmatrix} \sqrt{uv} \\ \sqrt{u/v} \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ Überprüfung der Formel für $g'(2,2)$ auf direktem Weg

$$g'(u,v) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{v/u} & \sqrt{u/v} \\ 1/\sqrt{uv} & -\sqrt{u/v^3} \end{pmatrix}$$

Übereinstimmung mit J^{-1} für $(u_*, v_*) = (2,2)$

Beispiel

Invertierbarkeit der komplexen Exponentialfunktion

$$z = x + \mathrm{i}y \mapsto \mathrm{e}^z = u + \mathrm{i}v$$

Formel von Euler-Moivre

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \cos t + \mathrm{i} \sin t$$

$\rightsquigarrow$ reelle Darstellung

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^x \cos y \\ \mathrm{e}^x \sin y \end{pmatrix}$$

mit der Jacobi-Matrix

$$f'(x, y) = \mathrm{e}^x \begin{pmatrix} \cos y & -\sin y \\ \sin y & \cos y \end{pmatrix}$$

$$\det f'(x, y) = (\mathrm{e}^x \cos x)^2 + (\mathrm{e}^x \sin x)^2 = \mathrm{e}^{2x} > 0$$

$\implies$ lokale Existenz einer Umkehrfunktion g (ein Zweig des komplexen Logarithmus) mit der Ableitung

$$g'(u, v) = \bigl(f'(x, y)\bigr)^{-1} = \mathrm{e}^{-x} \begin{pmatrix} \cos y & \sin y \\ -\sin y & \cos y \end{pmatrix}$$

keine globale Umkehrfunktion wegen

$$f(x, y + 2\pi k) = f(x, y), \quad k \in \mathbb{Z}$$

Periodizität $\implies$ unendlich viele Urbilder für jeden Punkt $(u, v) \neq (0, 0)$

Beispiel

Paradox bei der Berechnung partieller Ableitungen von Polarkoordinaten

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi, \quad r = \sqrt{x^2+y^2}$$

partielle Ableitung des Radius' nach der x-Koordinate

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{r} = \cos\varphi$$

Paradox:

$$r = x/\cos(\varphi) \quad \overset{?}{\Longrightarrow} \quad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{\cos(\varphi)}$$

Grund: Bei den Berechnungen der partiellen Ableitungen werden nicht die gleichen Variablen konstant gehalten. In der ersten Gleichung ist y konstant und bei der zweiten φ.

Die skalare Ableitungsregel $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = (\mathrm{d}x/\mathrm{d}y)^{-1}$ ist im allgemeinen falsch für partielle Ableitungen:

$$x_u \neq (u_x)^{-1}$$

korrekte Berechnung für eine Bijektion $(x, y) \leftrightarrow (u, v)$ mit Hilfe der Jacobi-Matrix:

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}^{-1}$$

im betrachteten Beispiel

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\,\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\,\cos\varphi \end{pmatrix}$$

Inverse $\quad\rightsquigarrow\quad$ partielle Ableitungen nach x und y:

$$J^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\frac{1}{r}\sin\varphi & \frac{1}{r}\,\cos\varphi \end{pmatrix} = \frac{\partial(r, \varphi)}{\partial(x, y)} = \begin{pmatrix} r_x & r_y \\ \varphi_x & \varphi_y \end{pmatrix}$$

insbesondere: $r_x = \cos\varphi$