Totale Ableitung und Jacobi-Matrix

Eine Funktion $f : D \ni \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist in einem Punkt x differenzierbar, wenn

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + o(|h|)$$

für $|(h_1, \ldots, h_n)| \to 0$.

Die Ableitung f' ist die Jacobi-Matrix der partiellen Ableitungen:

$$f' = (\partial_1 f, \ldots, \partial_n f) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1 & \cdots & \partial_n f_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_m & \cdots & \partial_n f_m \end{pmatrix}$$

und gemäß den Regeln des Matrix/Vektor-Kalküls ist

$$f'(x)h = \partial_1 f(x) h_1 + \cdots + \partial_n f(x) h_n \,.$$

Hinreichend für die Existenz der Ableitung $f'(x)$ ist die Stetigkeit der partiellen Ableitungen in einer Umgebung von x.

Alternative gebräuchliche Schreibweisen sind

$$f' = \mathrm{J}\, f = \frac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} \,.$$

Für eine skalare Funktion ($m = 1$) bezeichnet man die Ableitung als Gradient,

$$(\partial_1 f, \ldots, \partial_n f) = f' = (\operatorname{grad} f)^{\mathrm{t}} = \begin{pmatrix} \partial_1 f \\ \vdots \\ \partial_n f \end{pmatrix}^{\mathrm{t}} .$$

Dabei ist zu beachten, dass die $n \times 1$-Jacobi-Matrix ein Zeilen- und der Gradient ein Spaltenvektor ist; deshalb ist die Transposition $^{\mathrm{t}}$ notwendig.

Für die Parametrisierung einer Kurve $t \mapsto f(t) = (f_1(t), \ldots, f_m(t))^{\mathrm{t}}$ ($n = 1$) bezeichnet man den m-Vektor $f'(t)$ als Tangentenvektor.

Um die lineare Approximation kleiner Änderungen ($|h| \to 0$) hervorzuheben, schreibt man

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n$$

mit sogenannten Differentialen $\mathrm{d}f$ und $\mathrm{d}x_k$.

Beweis

betrachte bivariate Funktionen (analoge Argumentation im multivariaten Fall)

(i) zeige: Existenz von f' $\quad\Longrightarrow\quad$ $f' = (\partial_1 f, \ldots, \partial_n f)$

Für eine bivariate Funktion $f(x,y)$ und $h = (s,0)^{\mathrm{t}}$ gilt

$$\begin{aligned} f(x+s,y) &= f(x,y) + f'(x,y)\,(s,0)^{\mathrm{t}} + o(|(s,0)|) \\ &= f(x,y) + (\mathrm{J}\,f)_1\, s + o(|s|)\,, \end{aligned}$$

wobei $(\mathrm{J}\,f)_1$ die erste Spalte von $\mathrm{J}\,f$ bezeichnet.
Division durch s und Bilden des Grenzwerts für $s \to 0$ $\quad\rightsquigarrow$

$$(\mathrm{J}\,f)_1 = \lim_{s\to 0} \frac{f(x+s,y) - f(x,y)}{s} + \lim_{s\to 0} = \frac{o(|s|)}{s} = \partial_1 f(x,y) + 0$$

analoge Argumentation für $(\mathrm{J}\,f)_2$

(ii) zeige: Stetigkeit von $\partial_1 f, \ldots, \partial_n f \quad \Longrightarrow \quad$ Existenz von f'

betrachte eine skalare Funktion $f(x, y)$
Mittelwertsatz $\quad \Longrightarrow$

$$\begin{aligned} f(x+s, y+t) &= [f(x+s, y) - f(x, y)] + [f(x+s, y+t) - f(x+s, y)] \\ &\qquad + f(x, y) \\ &= s\, f_x(\xi, y) + t\, f_y(x+s, \eta) + f(x, y) \end{aligned}$$

mit $\xi \in (x, x+s)$, $\eta \in (y, y+t)$
Stetigkeit von f_x und $f_y \quad \Longrightarrow$

$$f_x(\xi, y) = f_x(x, y) + o(|s|), \quad f_y(x+s, \eta) = f_y(x, y) + o(|(s, t)|)$$

für $|\underbrace{(s, t)}_{h}| \to 0$ und damit die Differenzierbarkeit der Funktion f:

$$f(x+s, y+t) = f(x, y) + s f_x(x, y) + t f_y(x, y) + o(|h|)$$

separates Betrachten der Komponenten $\quad \rightsquigarrow \quad$ vektorwertiger Fall

Beispiel

Differenzierbarkeit der Funktion

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

(i) Unstetigkeit im Ursprung:

$$\lim_{x \to 0} f(x,x) = \frac{x^2}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2} \neq -\frac{1}{2} = \lim_{x \to 0} f(x,-x)$$

$\Longrightarrow$ f nicht stetig und damit auch nicht differenzierbar bei $(0,0)$

(ii) Existenz der partiellen Ableitungen:

$$f(x,0) = f(0,y) = 0$$

$\Longrightarrow$

$$f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$$

(iii) Unstetigkeit beider partieller Ableitungen im Ursprung:
bestimme den Grenzwert der partiellen Ableitung

$$f_x(x, y) = \frac{y^3 - x^2 y}{(x^2 + y^2)^2}$$

für $(x, y) \to (0, 0)$ entlang verschiedener Kurven:

$$y = x \quad \rightsquigarrow \quad \lim_{x \to 0} f_x(x, x) = \lim_{x \to 0} \frac{0}{(x^2 + x^2)^2} = 0$$

und

$$y = x^2 \quad \rightsquigarrow \quad \lim_{x \to 0} f_x(x, x^2) = \lim_{x \to 0} \frac{x^6 - x^4}{(x^2 + x^4)^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 - 1}{(1 + x^2)^2} = -1$$

Die Unstetigkeit der partiellen Ableitung f_y im Ursprung folgt analog.

Beispiel $\quad \Longrightarrow$
Die Existenz der partiellen Ableitungen ist nicht ausreichend für Differenzierbarkeit.

Beispiel

Überprüfung der Definition der Ableitung/Jacobi-Matrix für

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} x+2y \\ xy \\ 3x^2+y^2 \end{pmatrix}, \quad f'(x,y) = (f_x(x,y), f_y(x,y)) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ y & x \\ 6x & 2y \end{pmatrix}$$

berechne den Fehler $R = f(x+s, y+t) - f(x,y) - f'(x,y)(s,t)^{\mathrm{t}}$

$$f(x+s,y+t) = \begin{pmatrix} (x+s)+2(y+t) \\ (x+s)(y+t) \\ 3(x+s)^2+(y+t)^2 \end{pmatrix}, \quad f'(x,y)\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s+2t \\ ys+xt \\ 6xs+2yt \end{pmatrix}$$

$\implies R = (0, st, 3s^2+t^2)^{\mathrm{t}} = o(|(s,t)|)$,
d.h. jede Komponente strebt für $(s,t) \to (0,0)$ schneller gegen 0 als $|h| = |(s,t)|$

Beispiel

Jacobi-Matrizen verschiedener Dimension

(i) Gradient der skalaren Funktion $(x, y)^{\mathrm{t}} \mapsto r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$:
$r_x = (1/2)(x^2 + y^2)^{-1/2}(2x) = x/r$, Symmetrie $\implies$ $r_y = y/r$ und folglich

$$r' = (r_x, r_y) = (x/r, y/r) = (\operatorname{grad} r)^{\mathrm{t}}$$

(ii) Tangentenvektor, der durch

$$c(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}$$

parametrisierten Kurve (Schraubenlinie):

$$c'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix}$$

(iii) Jacobi-Matrix, der durch

$$\begin{pmatrix} \vartheta \\ \varphi \end{pmatrix} \overset{p}{\mapsto} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

definierten Parametrisierung der Einheitssphäre:

$$p' = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\vartheta,\varphi)} = \begin{pmatrix} x_\vartheta & x_\varphi \\ y_\vartheta & y_\varphi \\ z_\vartheta & z_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta\cos\varphi & -\sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta\sin\varphi & \sin\vartheta\cos\varphi \\ -\sin\vartheta & 0 \end{pmatrix}$$