Multivariate Taylor-Approximation

Eine in einer Umgebung D eines Punktes $a = (a_1, \ldots, a_m)$ $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ von m Veränderlichen x_k kann durch ein Taylor-Polynom vom totalen Grad $\leq n$ approximiert werden:

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \leq n} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(a)(x-a)^\alpha + R$$

mit $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_m!$, $\partial_\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_m^{\alpha_m}$, $y^\alpha = y_1^{\alpha_1} \cdots y_m^{\alpha_m}$ und dem Restglied

$$R = \sum_{|\alpha| = n+1} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(u)(x-a)^\alpha, \quad u = a + \theta(x-a)\,,$$

für ein $\theta \in [0, 1]$.

Für $x \to a$ strebt der Fehler mit der Ordnung $n+1$ gegen Null:

$$R = O(|x-a|^{n+1})\,.$$

Für Funktionen von zwei oder drei Variablen werden meist anstelle von $(x_1, \ldots)$ die Bezeichnungen (x, y) bzw. (x, y, z) verwendet. Beispielsweise hat das quadratische Taylor-Polynom für eine bivariate Funktion in dieser Notation die Form

$$\begin{aligned} p(x,y) &= f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(x-x_0) \\ &\quad + \frac{1}{2} f_{xx}(x-x_0)^2 + f_{xy}(x-x_0)^2 + \frac{1}{2} f_{yy}(y-y_0)^2 \end{aligned}$$

und für eine trivariate Funktion

$$p(x,y,z) = f(x_0,y_0,z_0) + \underbrace{\ldots}_{\text{8 Terme}} + \frac{1}{2} f_{zz}(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)^2 \,.$$

Beweis

Zurückführung auf den univariaten Fall (o.B.d.A. $a = 0$):
setze

$$f(x_1, ..., x_m) = f(tx_1, ..., tx_m)|_{t=1} = g(t)|_{t=1}$$

Taylor-Entwicklung der univariaten Funktion $g(t)$ im Nullpunkt

$$g(t) = g(0) + g'(0)\,t + \cdots + \frac{1}{n!}g^{(n)}(0)t^n + R$$

mit

$$R = \frac{1}{(n+1)!}g^{(n+1)}(\theta t)t^{n+1}$$

für ein $\theta \in [0, 1]$

Kettenregel $\implies$

$$\begin{aligned} g(0) &= f(0,\ldots,0) \\ g'(0) &= \sum_j \partial_j f(tx_1,\ldots,tx_m)x_j\Big|_{t=0} = \sum_j (\partial_j f(0))x_j \\ g''(0) &= \sum_i \sum_j (\partial_i \partial_j f(0))x_i x_j \\ &\vdots \end{aligned}$$

m^k Terme bei k-ter Ableitung
Zusammenfassen gleicher partieller Ableitungen $\rightsquigarrow$ Koeffizienten der Entwicklung
z.B. für $m = 2,\ k = 5$, Zusammenfassen von

$$\partial_1\partial_1\partial_1\partial_2\partial_2,\ \partial_1\partial_1\partial_2\partial_1\partial_2,\ \partial_1\partial_1\partial_2\partial_2\partial_1,\ \ldots$$

$\partial^\alpha,\ \alpha = (3,2) \quad \rightsquigarrow \quad \binom{5}{3} = 5!/(3!\,2!)$ Terme allgemein

$$\begin{aligned}
&\binom{k}{\alpha_1} \cdot \binom{k-\alpha_1}{\alpha_2} \cdots \binom{k-\alpha_1-\ldots-\alpha_{m-1}}{\alpha_m} \\
&\quad = \frac{k!}{\alpha_1!(k-\alpha_1)!} \frac{(k-\alpha_1)!}{\alpha_2!(k-\alpha_1-\alpha_2)!} \frac{(k-\alpha_1-\alpha_2)!}{\alpha_3!(k-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3)!} \cdots \\
&\quad = k!/(\alpha_1! \ldots \alpha_m!)
\end{aligned}$$

Terme, wenn nach der ν-ten Komponente jeweils α_ν-mal abgeleitet wird
Einsetzen der Ableitungen in die Funktion $g(t)$, Kürzen des Faktors $k!$
$\rightsquigarrow$ Entwicklung von f

Taylor-Entwicklung einer Funktion von zwei Variablen

$$
\begin{aligned}
f(x,y) \quad = \quad & f + f_x\,(x-x_0) + f_y\,(y-y_0) \\
& + \frac{f_{xx}}{2}\,(x-x_0)^2 + f_{xy}\,(x-x_0)\,(y-y_0) + \frac{f_{yy}}{2}\,(y-y_0)^2 \\
& + \frac{f_{xxx}}{6}\,(x-x_0)^3 + \frac{f_{xxy}}{2}\,(x-x_0)^2\,(y-y_0) \\
& + \frac{f_{xyy}}{2}\,(x-x_0)\,(y-y_0)^2 + \frac{f_{yyy}}{6}\,(y-y_0)^3 + R\,,
\end{aligned}
$$

wobei f und sämtliche partielle Ableitungen im Punkt (x_0, y_0) ausgewertet werden

Konkreter Fall: Entwickeln von

$$f(x,y) = \sin(x - \omega y)$$

im Punkt $(x_0, y_0) = (0, 0)$

$\sin^{(1)} = \cos$, $\sin^{(2)} = -\sin$, $\sin^{(3)} = -\cos$, … und

$$\partial_x^\alpha \partial_y^\beta f(0,0) = \sin^{(\alpha+\beta)}(0)\,(-\omega)^\beta$$

$\rightsquigarrow$ Approximation

$$\sin(x - \omega y) = x - \omega y - \frac{1}{6}\underbrace{(x^3 - 3\omega x^2 y + 3\omega^2 x y^2 - \omega^3 y^3)}_{(x-\omega y)^3} + R$$

mit dem Restglied

$$R = \frac{1}{4!}(f_{xxxx}x^4 + 4f_{xxxy}x^3 y + 6f_{xxyy}x^2 y^2 + 4f_{xyyy}xy^3 + f_{yyyy}y^4)$$

und Auswertung der Ableitungen an der Stelle $(\theta x, \theta y)$ für ein $\theta \in [0,1]$
$f_{xxxx} = \sin(\theta x - \omega\theta y)$, $f_{xxxy} = \sin(\theta x - \omega\theta y)(-\omega)$, … $\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} R &= \frac{\sin(\theta x - \omega\theta y)}{4!}(x^4 + 4x^3(-\omega)y + 6x^2\omega^2 y^2 + 4x(-\omega^3)y^3 + \omega^4 y^4) \\ &= \frac{1}{4!}\sin(\theta(x - \omega y))(x - \omega y)^4 \end{aligned}$$

Alternative Berechnung des Taylor-Polynoms durch Einsetzen von $t = x - \omega y$ in die eindimensionale Reihendarstellung der Sinusfunktion:

$$\sin(t) = t - \frac{t^3}{3!} + \cdots$$

$t = x - \omega y \quad \rightsquigarrow$

$$f(x, y) = (x - \omega y) - \frac{1}{3!}(x - \omega y)^3 + \frac{1}{4!}\sin(\theta t)(x - \omega y)^4$$

für ein $\theta \in [0, 1]$ (univariates Restglied)
vierte Ableitung des Sinus am Entwicklungspunkt Null $\quad \rightsquigarrow \quad$ kleineres Restglied

$$R = \frac{1}{5!}\cos(\theta t)(x - \omega y)^5$$

Beispiel

Taylor-Darstellung des Polynoms

$$f(x, y, z) = z^2 - xy$$

an der Stelle $(0, -2, 1)$

von Null verschiedene Ableitungen

$$f_x = -y,\ f_y = -x,\ f_z = 2z,\ f_{xy} = -1,\ f_{zz} = 2$$

Auswerten am Entwicklungspunkt $\quad \rightsquigarrow \quad 1 + 5$ Terme

$$\begin{aligned} z^2 - xy &= f + f_x x + f_y(y+2) + f_z(z-1) + f_{xy}x(y+2) + \frac{1}{2}f_{zz}(z-1)^2 \\ &= 1 + 2x + (-0)(y+2) + 2(z-1) + (-1)x(y+2) + \frac{1}{2}2(z-1)^2 \end{aligned}$$

alternativ: Entwicklung durch Umformung
Substitution

$$y + 2 = \eta\,, \quad z - 1 = \zeta$$

$\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= z^2 - xy \\ &= (\zeta + 1)^2 - x(\eta - 2) = \zeta^2 + 2\zeta + 1 - x\eta + 2x \end{aligned}$$