Tangentialebene

Die Tangentialebene im Punkt $p = (p_1, \ldots, p_n)^{\mathrm{t}}$ einer durch

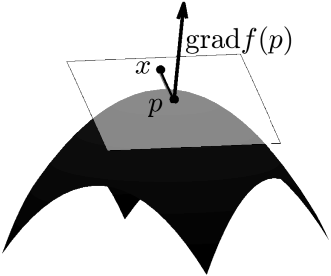
$$S:\ f(x_1, \ldots, x_n) = c$$

implizit definierten Fläche besitzt die Darstellung

$$E:\ 0 = (\operatorname{grad} f(p))^{\mathrm{t}}\,(x - p) = \sum_{k=1}^{n} \partial_k f(p)(x_k - p_k)\,,$$

falls mindestens eine der Komponenten $\partial_k f(p)$ des Gradienten ungleich Null ist. Der Normalenvektor von E ist also parallel zu $\operatorname{grad} f$.

Ist $\operatorname{grad} f(p) = (0, \ldots, 0)^{\mathrm{t}}$, so muss eine Tangentialebene im Punkt p nicht existieren. Beispielsweise kann die Fläche eine Kante oder Spitze haben.



Für den Graph einer Funktion $x \mapsto x_n = g(x_1, \ldots, x_{n-1})$ ist

$$E: \; x_n - g(q) = \sum_{k=1}^{n-1} \partial_k g(q)(x_k - q_k)$$

die Gleichung der Tangentialebene im Punkt $(q_1, \ldots, q_{n-1}, g(q))^{\mathrm{t}}$. Die partielle Ableitung $\partial_k g(q)$ entspricht somit der Steigung der Tangentialebene in Richtung der k-ten Koordinatenachse. Die Normale der Tangentialebene ist parallel zu $(-\partial_1 g(q), \ldots, -\partial_{n-1} g(q), 1)^{\mathrm{t}}$.

Wird eine Fläche $S \subset \mathbb{R}^n$ durch eine Parametrisierung beschrieben,

$$S:\ (s_1, \ldots, s_{n-1})^{\mathrm{t}} \mapsto (h_1(s), \ldots, h_n(s))^{\mathrm{t}}\,,$$

so spannen die partiellen Ableitungen $\partial_k h(s^*)$ die Tangentialebene E im Punkt $p = h(s^*)$ auf, d.h.

$$E:\ p + \sum_{k=1}^{n-1} s_k \partial_k h(p), \quad s_k \in \mathbb{R}\,.$$

Beweis

(i) Implizite Darstellung einer Fläche durch $f(x_1,\ldots,x_n)=c$:
Definition der totalen Ableitung $f'=(\operatorname{grad} f)^{\mathrm{t}} \quad \Longrightarrow$

$$f(x)=f(p)+\operatorname{grad} f(p)^{\mathrm{t}}(x-p)+o(|x-p|)$$

Vernachlässigung des Terms $o(|x-p|)$, $f(x)=f(p)=c \quad \rightsquigarrow$
Gleichung der Tangentialebene

(ii) Darstellung einer Fläche als Funktionsgraph $y=g\,(x_1,\ldots,x_{n-1})$:

$$\Delta y=\sum_{i=1}^{n-1}\partial_i g(q)(\Delta x_i)+o(|\Delta x|)$$

mit $\Delta y=y-g(q)$ und $\Delta x=x-q$
Vernachlässigung des Restgliedes $\quad\rightsquigarrow\quad$ Darstellung der Tangentialebene

Beispiel

Tangentialebenen für den Kegel

$$K:\ f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

$\operatorname{grad} f(x,y,z) = (2x, 2y, -2z)^{\mathrm{t}}$ $\quad\rightsquigarrow\quad$ Tangentialebene im Punkt (x_0, y_0, z_0)

$$E:\ 2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) - 2z_0(z - z_0) = 0$$

Tangentialebene im Punkt $(x_0, y_0, z_0) = (3, 4, 5)$

$$E:\ 0 = 6(x-3) + 8(y-4) - 10(z-5) = 6x + 8y - 10z$$

(Jede) Tangentialebene enthält den Ursprung.

$\operatorname{grad} f(x_0, y_0, z_0) = (0,0,0)^{\mathrm{t}}$ für $(x_0, y_0, z_0) = (0,0,0)$
$\rightsquigarrow$ keine Tangentialebene an der Spitze des Kegels

Beispiel

Tangentialebenen für den den Funktionsgraph von

$$g(x) = |x - p|^{-1} - |x + p|^{-1}, \quad x = (x_1, x_2)$$

(Potential eines Dipols mit Ladungen in den Punkten $\pm p = \pm(p_1, p_2)$)

$\partial_k (x_1^2 + x_2^2)^{-1/2} = (-1/2)(x_1^2 + x_2^2)^{-3/2}(2x_k) \quad \rightsquigarrow$

$$\partial_k g(x) = \frac{x_k + p_k}{|x + p|^3} - \frac{x_k - p_k}{|x - p|^3}, \quad k = 1, 2$$

Gleichung der Tangentialebene E im Punkt $x = q = (q_1, q_2)$

$$\begin{aligned} x_3 - g(q) &= \sum_{k=1}^{2} \underbrace{\left(\frac{q_k + p_k}{|q + p|^3} - \frac{q_k - p_k}{|q - p|^3} \right)}_{\partial_k g(q)} (x_k - q_k) \\ &= \frac{(q + p)((x_1, x_2) - q)^{\mathrm{t}}}{|q + p|^3} - \frac{(q - p)((x_1, x_2) - q)^{\mathrm{t}}}{|q - p|^3} \end{aligned}$$

z.B. für $q = (0,0)$

$$g(q) = 0, \quad E: \, x_3 = 2\frac{p_1 x_1 + p_2 x_2}{|p|^3}$$

Tangentialebene verläuft durch den Ursprung und enthält die Gerade senkrecht zu p

keine Tangentialebenen in den Singularitäten ($x = \pm p$)

Beispiel

Tangentialebene des Hyperboloids

$$H:\ (\varphi, z) \mapsto h(\varphi, z) = (\sqrt{1+z^2}\cos\varphi, \sqrt{1+z^2}\sin\varphi, z)^{\mathrm{t}}$$

im Punkt $p = (1, -1, 1) = h(-\pi/4, 1)^{\mathrm{t}}$

partielle Ableitungen der Parametrisierung

$$h_\varphi(\varphi, z) = \begin{pmatrix} -\sqrt{1+z^2}\sin\varphi \\ \sqrt{1+z^2}\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad h_z(\varphi, z) = \begin{pmatrix} \dfrac{z}{\sqrt{1+z^2}}\cos\varphi \\ \dfrac{z}{\sqrt{1+z^2}}\sin\varphi \\ 1 \end{pmatrix}$$

Auswertung im Berührpunkt

$$h_\varphi(-\pi/4, 1) = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}\,(-1/\sqrt{2}) \\ \sqrt{2}\,(1/\sqrt{2}) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ h_z(-\pi/4, 1) = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ parametrische Darstellung der Tangentialebene

$$E: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}$$

Vektorprodukt der aufspannenden Vektoren $\rightsquigarrow$ Normale

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und der impliziten Darstellung

$$E: 0 = (-1, -1, 1) \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - (-1) \\ z - 1 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad x + y + z = -1$$