Tangente

Der Tangentenvektor einer mit einer stetig differenzierbaren Funktion

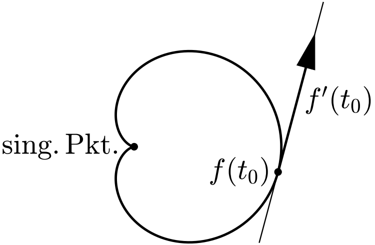
$$f\,:\;t \mapsto (f_1(t),\ldots,f_n(t))^{\mathrm{t}}$$

parametrisierten Kurve im Punkt $f(t_0)$ ist die Ableitung $f'(t_0)$, falls mindestens eine der Komponenten $f_k'(t_0)$ ungleich Null ist. Die Tangente ist in diesem Normalfall die durch

$$f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0), \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

parametrisierte Gerade.

Ist $f'(t_0)$ der Nullvektor, so ist die Parametrisierung bei t_0 singulär. Ein Tangentenvektor kann, muss aber nicht existieren, denn die Tangentenrichtung kann sich im Punkt $f(t_0)$ abrupt ändern.



Beispiel

Tangentenvektor und Tangente für die Schraubenlinie
$C:\ t \mapsto f(t) = (\cos t, \sin t, t)^{\mathrm{t}}$

(i) Tangentenvektor:

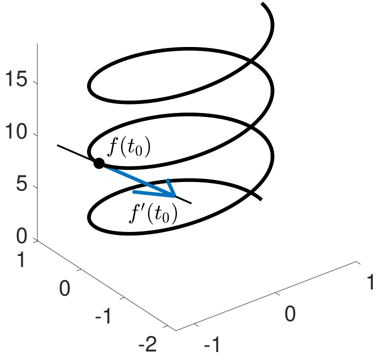
$$f'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)^{\mathrm{t}}$$

(ii) Tangente im Punkt $f(3\pi)$:

$$\begin{aligned} f(3\pi) &= (-1, 0, 3\pi)^{\mathrm{t}} \\ f'(3\pi) &= (0, -1, 1)^{\mathrm{t}} \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ Parametrisierung

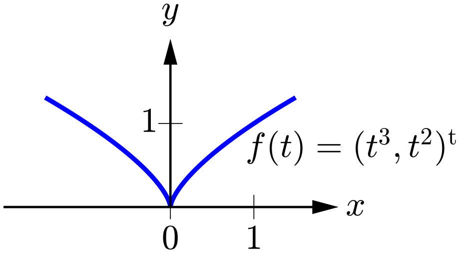
$$t \mapsto \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3\pi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} (t - 3\pi)$$



Beispiel

Stetige und unstetige Änderung des Tangentenvektors an einem singulären Kurvenpunkt

(i) $t \mapsto f(t) = (t^3, t^2)^{\mathrm{t}}$:
abrupte Richtungsänderung für $t_0 = 0$ von $(0, -1)^{\mathrm{t}}$ nach $(0, 1)^{\mathrm{t}}$
möglich, da $f'(0) = (0, 0)^{\mathrm{t}}$



(ii) $t \mapsto g(t) = (t^3, t^4)^{\mathrm{t}}$
stetige Tangentenänderung trotz $f'(0) = (0,0)^{\mathrm{t}}$
Umparametrisierung

$$s = t^3, \quad f(t) = g(s) = \begin{pmatrix} s \\ s^{4/3} \end{pmatrix}$$

$$\implies \quad g'(s) = (1, 4s^{1/3}/3)^{\mathrm{t}} \text{ stetig bei } s = 0$$