Stetigkeit multivariater Funktionen

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \supseteq D \to \mathbb{R}^m$ ist in einem Punkt $(a_1, \ldots, a_n)$ ihres Definitionsbereichs D stetig, wenn

$$x \to a \quad \Longrightarrow \quad f(x) \to f(a)\,,$$

d.h. für alle $\varepsilon > 0$ existiert $\delta(\varepsilon) > 0$, so dass

$$|x - a| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon\,.$$

Gilt dies für alle Punkte $a \in D$, so ist f stetig auf D.

Existiert der Grenzwert für einen Punkt a auf dem Rand ∂D des Definitionsbereichs, so lässt sich f in diesen Randpunkt stetig fortsetzen.

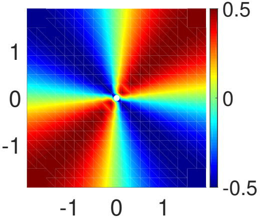
Stetigkeit ist verträglich mit den arithmetischen Operation, d.h. eine Summe, ein Produkt und ein Quotient stetiger Funktionen ist stetig. Bei der Bildung eines Quotienten muss lediglich vorausgesetzt werden, dass der Nenner keine Nullstelle hat. Desweiteren ist die Hintereinanderschaltung stetiger Funktionen stetig.

Beispiel

Unstetigkeit nicht-konstanter bivariater in Polarkoordinaten gegebener Funktionen f, die nur vom Winkel und nicht vom Radius abhängen

$f\ :\ (r,\varphi)\mapsto f(\varphi)$ mit $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $r=\sqrt{x^2+y^2}$
z.B.

$$f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}=\cos\varphi\sin\varphi$$



Einschränkung auf Gerade durch den Ursprung, $g\ :\ y = mx$ bzw. $g\ :\ \varphi = c \quad\rightsquigarrow\quad$ konstanter Funktionswert:

$$f(x,mx)=\frac{mx^2}{x^2+(mx)^2}=\frac{m}{1+m^2}=c_m \quad \text{bzw.} \quad f(\varphi)=\cos\varphi\sin\varphi=c_\varphi$$

nicht stetig fortsetzbar für $(x,y)\to(0,0)$, da verschiedener Grenzwert für jede Ursprungsgerade:

$$\lim_{x\to 0} f(x,mx)=\lim_{x\to 0}\frac{m}{1+m^2}=\frac{m}{1+m^2}$$