Richtungsableitung

Die Ableitung einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \ni D \to \mathbb{R}$ in Richtung eines Vektors $v = (v_1, \ldots, v_n)^{\mathrm{t}}$ im Punkt x ist die Steigung der univariaten Funktion $t \mapsto f(x + tv)$ an der Stelle $t = 0$:

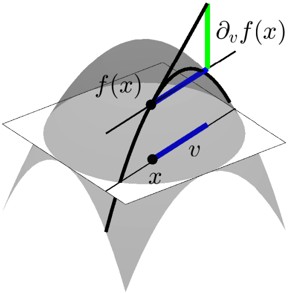
$$\partial_v f(x_1, \ldots, x_n) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t} = \left(\frac{d}{dt} f(x + tv) \right)_{t=0} .$$

Speziell ist $\partial_{e_k} f$ mit e_k dem k-ten Einheitsvektor die partielle Ableitung bzgl. der k-ten Koordinate.

Aufgrund der Kettenregel gilt

$$\partial_v f(x) = (\operatorname{grad} f(x))^{\mathrm{t}} \, v = \partial_1 f(x) v_1 + \cdots + \partial_n f(x) v_n \, .$$

Die lokale Änderung von f ist somit maximal (minimal) für $v = s \operatorname{grad} f(x)$ mit $s > 0$ ($s < 0$).



Die Richtungsableitung kann allgemeiner auch für eine vektorwertige Funktion $f : \mathbb{R}^n \ni D \to \mathbb{R}^m$ definiert werden. Bei der Berechnung ist dann der Gradient durch die Jacobi-Matrix zu ersetzen:

$$\partial_v f(x) = f'(x)\, v\,.$$

Beispiel

Berechnung der Richtungsableitung der Funktion

$$f(x, y) = x^2 y^3$$

im Punkt $(x, y) = (2, -1)$

Gradient

$$\operatorname{grad} f(x, y)|_{(2,-1)} = \begin{pmatrix} 2xy^3 \\ 3x^2y^2 \end{pmatrix}\Bigg|_{(2,-1)} = \begin{pmatrix} -4 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ Richtungableitung

$$\partial_v f(2, -1) = (-4, 12) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = -4v_1 + 12v_2$$

maximal für

$$v = s \begin{pmatrix} -4 \\ 12 \end{pmatrix} \quad \text{mit } s > 0\,,$$

also z.B. für $v = (-1, 3)$

Näherung (lineare Taylor-Approximation) für den größten lokalen Anstieg von f:

$$\begin{aligned} f(2-t,-1+3t) &\approx f(2,-1)+t\partial_v f(2,-1) \\ &= -4+t(-4,12)\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= -4+40t \end{aligned}$$

für kleine Werte von t