Partielle Ableitungen von multivariaten Polynomen

Die partielle Ableitung

$$\partial^\alpha x^\beta = \partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_n^{\alpha_n} \left(x_1^{\beta_1} \cdots x_n^{\beta_n} \right)$$

eines Monoms ist nur dann ungleich Null, wenn
$\alpha \le \beta \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha_k \le \beta_k \, \forall k$, und in diesem Fall gleich

$$c\, x^{\beta-\alpha}, \quad c = \prod_{k=1}^{n} \beta_k(\beta_k - 1) \cdots (\beta_k - \alpha_k + 1) = \beta! / \alpha!$$

mit $(j, k, \ldots)! = j!\, k! \cdots$. Insbesondere ist

$$\partial^\alpha x^\beta |_{x=0} = \alpha! \delta_{\alpha,\beta} \, .$$

Gilt für ein Polynom $p(x) = \sum_\beta c_\beta \, x^\beta$

$$\partial^\alpha p \equiv 0 \quad \forall \alpha \, \mathrm{mit} \, |\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = m \, ,$$

so hat p totalen Grad $< m$, d.h. $c_\beta = 0$ für $|\beta| \ge m$.

Beweis

zu zeigen:

$$p = \sum_\beta c_\beta x^\beta,\ \partial^\alpha p \equiv 0\ \forall\,\alpha \,\mathrm{mit}\, |\alpha| = m \quad \Longrightarrow \quad c_\beta = 0\ \forall\,\beta \,\mathrm{mit}\, |\beta| \geq m$$

Widerspruchsannahme: $c_\beta \neq 0$ für ein β mit $|\beta| \geq m$
wähle α mit $|\alpha| = m$ und $\alpha \leq \beta \quad \rightsquigarrow$

$$\partial^\alpha p(x) = \sum_{\beta' \geq \alpha} c_{\beta'}\,(\beta'!/\alpha!)\,x^{\beta'-\alpha} \not\equiv 0\,,$$

da mindestens der Summand mit $\beta' = \beta$ nicht verschwindet im Gegensatz zu der Annahme, dass alle partiellen Ableitungen der Ordnung m identisch Null sind