Partielle Ableitungen

Die partielle Ableitung $\partial_k f$ einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \ni D \to \mathbb{R}^m$ nach der k-ten Variablen x_k ist die Ableitung der univariaten Funktion

$$x_k \mapsto f(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n)\,,$$

bei der die Variablen x_j, $j \neq k$, als Konstanten betrachtet werden. Man schreibt auch

$$\partial_k f = f_{x_k} = \frac{\partial f}{\partial x_k}\,,$$

bzw. wenn x, y, z als Variablen verwendet werden, $\partial_x f = f_x = \partial f / \partial x$, $\partial_y f = f_y$, etc.. Gemäß der Definition der univariaten Ableitung gilt

$$\partial_k f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\ldots, x_k + h, \ldots) - f(\ldots, x_k, \ldots)}{h}\,.$$

Partielle Ableitungen sind sowohl für skalare ($m = 1$) als auch für vektorwertige ($m > 1$) reelle Funktionen definiert. In beiden Fällen bleibt der Funktionstyp beim partiellen Ableiten erhalten. Definitionsgemäß gilt

$$\partial_k \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_k f_1 \\ \vdots \\ \partial_k f_n \end{pmatrix},$$

d.h. die partielle Ableitung wird simultan in den Komponenten gebildet.

Die übliche Konvention ist, sowohl für die Variable x als auch für die Funktion f Spaltenvektoren zu verwenden. Dies ist wichtig bei der Definition der totalen Ableitung bzw. einer linearen Approximation von f.

Beispiel

Partielle Ableitungen für verschiedene Funktionstypen

(i) Skalare Funktionen:
skalare partielle Ableitungen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto f(x,y) = xy^2 \quad \rightsquigarrow$$

$$f_x(x,y) = y^2, \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2xy$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto f(x_1,x_2,x_3) = x_1^3 x_2 + x_1 x_3^2 \quad \rightsquigarrow$$

$$\partial_1 f(x) = 3x_1^2 x_2 + x_3^2, \quad \frac{f(x)}{\partial x_2} = x_1^3, \quad f_{x_3}(x_1,x_2,x_3) = 2x_1 x_3$$

(Verwendung der verschiedenen alternativen Notationen)

(ii) Vektorwertige Funktion:
gleiche Komponentenzahl der partiellen Ableitungen

$$\begin{pmatrix} r \\ t \end{pmatrix} \mapsto f(r,t) = \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow$$

$$f_r(r,t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad f_t(r,t) = \begin{pmatrix} -r\sin t \\ r\cos t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f_1(x_1,x_2,x_3) \\ f_2(x_1,x_2,x_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2^3 x_3 \\ x_1^2 + x_1 x_3^2 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow$$

$$\begin{aligned} \partial_1 f(x) &= \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(x) \\ \partial_1 f_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2x_1 + x_3^2 \end{pmatrix} \\ \frac{\partial f(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_2} &= \begin{pmatrix} 3x_2^2 x_3 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \partial_3 f(x_1,x_2,x_3) &= \begin{pmatrix} x_2^3 \\ 2x_1 x_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$