Newton-Verfahren

Eine Lösung $x_* \in \mathbb{R}^n$ eines nichtlinearen Gleichungssystems

$$f_1(x) = \cdots = f_n(x) = 0$$

kann mit der Newton-Iteration bestimmt werden, die auf einer linearen Approximation einer glatten Funktion f basiert:

$$(0, \ldots, 0)^{\mathrm{t}} \stackrel{!}{=} f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x \,.$$

Das Inkrement Δx für einen Iterationsschritt $x \to y = x + \Delta x$ berechnet sich somit als Lösung des linearen Gleichungssystems

$$f'(x)\Delta x = -f(x)\,.$$

Ist f zweimal stetig differenzierbar und die Jacobi-Matrix $f'(x_*)$ invertierbar, so konvergiert die durch das Verfahren erzeugte Folge $x_0, x_1, \ldots$ lokal quadratisch:

$$\|x_{k+1} - x_*\| \leq c \, \|x_k - x_*\|^2$$

für Startwerte x_0 in einer Umgebung U von x_*. Insbesondere ist $\det f'(x) \neq 0$ für $x \in U$, so dass das lineare Gleichungssystem für Δx eindeutig lösbar ist.

Um die Iteration robuster zu gestalten und sicherzustellen, dass auch in größerer Entfernung von einer Lösung in jedem Schritt eine Verbesserung erzielt wird, kann man eine Dämpfungsstrategie verwenden:

$$x \to y = x + \lambda \Delta x$$

mit einem Dämpfungsparameter $\lambda \in (0, 1]$. Es liegt nahe, λ so zu wählen, dass $\|f(y)\| < \|f(x)\|$. In dieser Form ist die Iteration jedoch nicht affin invariant. Bereits eine unterschiedliche Skalierung der Funkionskomponenten f_k kann zu verschiedenen Ergebnissen führen.

Dieser Nachteil lässt sich beheben, indem man die Funktionswerte mit der Inversen der Jacobi-Matrix multipliziert. Fordert man zusätzlich, dass die Reduktion des Fehlers mindestens proportional zu $\lambda/2$ ist, so führt dies auf den Test

$$\|f'(x)^{-1}f(y)\| \overset{!}{\leq} (1-\lambda/2)\|\underbrace{f'(x)^{-1}f(x)}_{\Delta}\|\,.$$

Beginnend mit $\lambda = 1$ (Normalfall) wird der Dämpfungsparameter sukzessive halbiert, bis diese Ungleichung erfüllt ist. Im allgemeinen wird durch diese Strategie das Konvergenzgebiet wesentlich vergrößert.

Beweis

(i) Beschreibung der Iteration:
lineare Approximation von $f \quad \Longrightarrow$

$$(0,\ldots,0)^{\mathrm{t}} = f(x_*) = f(x) + f'(x)(x_* - x) + R\,,$$
$$R_k = \frac{1}{2}\,(x_* - x)^{\mathrm{t}}\,\mathrm{H}\,f_k(\tilde{x}_k)(x_* - x), \quad k = 1,\ldots,n\,,$$

mit $\mathrm{H}\,f_k$ der Hesse-Matrix der k-ten Komponente von f und $\tilde{x}_k$ einem Punkt auf dem Segment zwischen x_* und x
Auflösen nach x_* und Vernachlässigen des Restglieds $R \quad \rightsquigarrow \quad$ verbesserte Näherung $y \approx x_*$,

$$y = x - f'(x)^{-1} f(x)$$

Auflösen nach $f(x) \quad \Longrightarrow$

$$f(x) = -f'(x)(x_* - x) - R$$

und nach Einsetzen in die Iterationsvorschrift

$$y = x_* + f'(x)^{-1} R$$

(ii) Abschätzung des Fehlers:
o.B.d.A. Verwendung der Maximumsnorm für Vektoren und der zugeordneten Zeilensummennorm für Matrizen
setze $C = \max(\|f'(x_*)^{-1}\|, \|\operatorname{H} f_1(x_*)\|, \ldots, \|\operatorname{H} f_n(x_*)\|)$ und wähle ein positives $\delta < 1/(4C^2)$, so dass

$$\|x - x_*\| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \|f'(x)^{-1}\|, \|\operatorname{H} f_k(x)\| \leq 2C$$

(möglich aufgrund der Stetigkeit der beteiligten Funktionen)
$\|x - x_*\| < \delta \quad \Longrightarrow$

$$\|y - x_*\| \leq \|f'(x)^{-1}\| \|R\| \leq \underbrace{(2C)\,\frac{1}{2}\,(2C)}_{c}\,\|x - x_*\|^2$$

und nach Wahl von $\delta < 1/(4C^2)$ ebenfalls

$$\|y - x_*\| < \frac{1}{2}\,\|x - x_*\|$$

$\Longrightarrow$ δ-Umgebung von x_* enthält auch y
$\Longrightarrow$ Gültigkeit der Abschätzungen für alle generierten Approximationen

(iii) Dämpfung:
zu zeigen: $\|f'(x)^{-1}f(y)\| \le (1-\lambda/2)\|\Delta\|$ für hinreichend kleines λ

$$f(y) = f(x - \lambda f'(x)^{-1}f(x)) = f(x) - \lambda f(x) + R$$

mit $\|R\| = O\left((\lambda\|f(x)\|)^2\right) \quad \Longrightarrow$

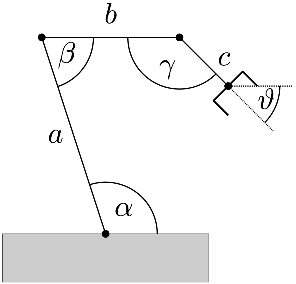
$$\|f(x)^{-1}f(y)\| \le (1-\lambda)\|\underbrace{f'(x)^{-1}f(x)}_{\Delta}\| + C\lambda^2\|f(x)\|^2$$

$\Longrightarrow$ behauptete Ungleichung, da $C\lambda^2\|f(x)\|^2 \le (\lambda/2)\|\Delta\|$ für $\lambda \to 0$

Beispiel

Vereinfachte Robotersteuerung

Roboterarm mit drei Drehgelenken: Position P und Orientierung ϑ des Endeffektors als nichtlineare Funktion $q = (p_1, p_2, \vartheta)^{\mathrm{t}}$ der Gelenkwinkel α, β, γ



Winkel der Robotersegmente mit der x-Achse: α, $\alpha - (\pi - \beta)$, $\alpha - (\pi - \beta) - (\pi - \gamma)$

$\implies$

$$
\begin{aligned}
q_1(\alpha,\beta,\gamma) &= a\cos(\alpha) + b\cos(\alpha+\beta-\pi) + c\cos(\alpha+\beta+\gamma-2\pi)\\
q_2(\alpha,\beta,\gamma) &= a\sin(\alpha) + b\sin(\alpha+\beta-\pi) + c\sin(\alpha+\beta+\gamma-2\pi)\\
q_3(\alpha,\beta,\gamma) &= \alpha+\beta+\gamma-2\pi
\end{aligned}
$$

$a = 3,\ b = 2,\ c = 1$ und Substitution von $\beta' = \alpha + \beta$,
$\vartheta = q_3 = \alpha + \beta + \gamma - 2\pi \rightsquigarrow$ nichtlineares System

$$\begin{aligned} 0 = f_1(\alpha, \beta') &= p_1 - 3\cos\alpha + 2\cos\beta' - \cos\vartheta \\ 0 = f_2(\alpha, \beta') &= p_2 - 3\sin\alpha + 2\sin\beta' - \sin\vartheta \end{aligned}$$

Ruhelage des Roboterarms: $\tilde{p} = (2, 2)^{\mathrm{t}}$, $\tilde{\vartheta} = -\pi/2$ $(\alpha = \beta = \gamma = \pi/2)$
$\rightsquigarrow$ Lösung $\alpha_0 = \pi/2$, $\beta'_0 = \pi$ mit der Jacobi-Matrix

$$f'(\alpha_0, \beta'_0) = \begin{bmatrix} 3\sin\alpha_0 & -2\sin\beta'_0 \\ -3\cos\alpha_0 & 2\cos\beta'_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

erster Schritt des Newton-Verfahrens, $(\alpha_0, \beta'_0) \to (\alpha_1, \beta'_1)$, zur Erreichung der benachbarten Position $p = (2, 3)^{\mathrm{t}}$, $\vartheta = -\pi/4$:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\alpha \\ \Delta\beta' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$$

$\implies \Delta\alpha = -\sqrt{2}/6\,,\ \Delta\beta' = -\sqrt{2}/4$ und

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \Delta\alpha \\ \Delta\beta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi/2 + \sqrt{2}/6 \\ \pi + \sqrt{2}/4 \end{pmatrix}$$

Fehler zur Position p: $f(\alpha_1, \beta'_1) \approx (0.1172,\ 0.0976)$