Multivariate Polynome

Ein Polynom p in n Variablen $x_1, \ldots, x_n$ ist eine Linearkombination von Monomen:

$$p(x) = \sum_{\alpha} a_\alpha x^\alpha, \quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}\ ,$$

mit $\alpha_k \in \mathbb{N}_0$.
Je nach Summationsbereich unterscheidet man zwischen

- totalem Grad $\leq m$: $\sum \alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \leq m$;
- maximalem Grad $\leq m$: $\max \alpha = \max_k \alpha_k \leq m$.

Für bivariate und trivariate Polynome bezeichnet man die Variablen meist mit x, y bzw. x, y, z. Beispielsweise bilden die Monome

$$(x, y) \mapsto x^j y^k, \quad j, k \geq 0,\ j + k \leq m$$

eine Basis für die bivariaten Polynome vom totalen Grad $\leq m$, und eine Basis für die trivariaten Polynome mit maximalen Grad $\leq m$ besteht aus den Monomen

$$(x, y, z) \mapsto x^j y^k z^\ell, \quad 0 \leq j, k, \ell \leq m .$$

Man bezeichnet ein n-variates Polynom p als homogen vom Grad k, wenn

$$p(sx) = s^k p(x) \quad \text{für } s \in \mathbb{R} .$$

Ein solches Polynom ist eine Linearkombination der Monome $x \mapsto x^\alpha$ mit $\sum \alpha = k$.

Die Dimensionen der drei n-variaten Polynomräume entsprechen den Anzahlen der relevanten Monome:

homogen vom Grad k	totaler Grad $\leq m$	maximaler Grad $\leq m$
$\binom{k+n-1}{n-1}$	$\binom{m+n}{n}$	$(m+1)^n$

.

Beweis

(i) Bivariate Polynome ($n = 2$):
Auflistung der homogenen Monome

$$\begin{aligned}
k = 0 &: & 1 \\
k = 1 &: & x,\, y \\
k = 2 &: & x^2,\, xy,\, y^2 \\
k = 3 &: & x^3,\, x^2y,\, y^2x,\, y^3 \\
\dots,
\end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ Anzahl $k + 1 = \binom{k+2-1}{2-1}$ für Grad k
Dimension der bivariaten Polynome vom totalen Grad $\leq m$:

$$1 + 2 + \cdots + (m+1) = \frac{(m+2)(m+1)}{2} = \binom{m+2}{2}$$

$(m+1)^2$ Monome vom maximalen Grad $\leq m$

$$x^j y^k, \quad j, k \leq m$$

(ii) Homogene n-variate Polynome vom Grad k:
identifiziere den Exponent

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n),\ \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = k$$

eines relevanten Monoms mit einer strikt monotonen Folge

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \alpha_1 + 1 \\ \beta_2 &= \alpha_1 + \alpha_2 + 2 \\ \ldots & \\ \beta_{n-1} &= \alpha_1 + \cdots + \alpha_{n-1} + (n-1) \end{aligned}$$

aus $\{1, \ldots, k+n-1\}$, d.h.

$$\alpha_j = \beta_j - \beta_{j-1} - 1$$

mit $\beta_0 = 0$, $\beta_n = k + n$
$\rightsquigarrow \quad \binom{k+n-1}{n-1}$ Möglichkeiten

(iii) n-variate Monome vom totalen Grad $\leq m$:
$\iff$ $(n+1)$-variate homogene Monome vom Grad m:

$$x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \quad \iff \quad x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} x_{n+1}^{m-\sum \alpha_i}$$

(Letzter Exponent liegt fest.)
$\rightsquigarrow$ Dimension des Polynomraums

$$\binom{m+(n+1)-1}{(n+1)-1}$$

(iv) n-variate Polynome vom maximalen Grad $\leq m$:
Analog zum bivariaten Fall existieren $(m+1)^n$ Monome $x \mapsto x^\alpha$ mit $0 \leq \alpha_j \leq m$.

Beispiel

Verschiedene bi- und trivariate Polynome

bivariates Polynom mit totalen Grad ≤ 3

$$\begin{aligned} p(x,y) &= a_{0,0} + (a_{1,0}x + a_{0,1}y) + (a_{2,0}x^2 + a_{1,1}xy + a_{0,2}y^2) \\ &\quad + (a_{3,0}x^3 + a_{2,1}x^2y + a_{1,2}xy^2 + a_{0,3}y^3) \end{aligned}$$

bzw. $p(x_1, x_2) = \sum_{\alpha_1+\alpha_2 \leq 3} a_\alpha x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$

spezielles homogenes bivariates Polynom vom Grad 5

$$(x,y) \mapsto p(x,y) = 7x^5 - 8x^3y^2 + 6xy^4$$

bzw. $p(x_1, x_2) = 7x^{(5,0)} - 8x^{(3,2)} + 6x^{(1,4)}$

trivariates Polynom mit maximalem Grad ≤ 1 in drei Variablen:

$$\begin{aligned} p(x,y,z) &= a_{0,0,0} + (a_{1,0,0}x + a_{0,1,0}y + a_{0,0,1}z) \\ &\quad + (a_{1,1,0}xy + a_{1,0,1}xz + a_{0,1,1}yz) + a_{1,1,1}xyz \end{aligned}$$