Mehrfache partielle Ableitungen

Zweifache (hintereinander ausgeführte) partielle Ableitungen werden mit

$$\partial_j \partial_k f = f_{x_k x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}$$

bezeichnet. Analog schreibt man $\partial_j \partial_k \partial_\ell \ldots f$ für partielle Ableitungen höherer Ordnung.

Sind die partiellen Ableitungen stetig, so spielt die Reihenfolge der Differentiation keine Rolle. In diesem (Normal)fall kann man alternativ die Multiindex-Notation

$$\partial^\alpha f = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n} f, \quad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n),$$

verwenden, wobei der Index $\alpha_k \in \mathbb{N}_0$ die Anzahl der partiellen Ableitungen nach der k-ten Variablen bezeichnet. Die Summe $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ ist die Ordnung der partiellen Ableitung. Beispielsweise ist für eine glatte Funktion f von 3 Variablen $\partial^{(2,1,3)} f = \partial_1^2 \partial_2 \partial_3^3 f$ eine partielle Ableitung der Ordnung $|(2,1,3)| = 2 + 1 + 3 = 6$.

Beispiel

Partielle Ableitungen höherer Ordnung verschiedener Funktionstypen

(i) $f(x, y) = x/y$:

$$f_x = 1/y,\ f_y = -x/y^2, \quad f_{xx} = 0,\ f_{yy} = 2x/y^3,\ f_{xy} = f_{xy} = -1/y^2$$

(ii) $f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \cos(x_1 x_2) \\ \sin(x_1 + x_2) \end{pmatrix}$:

$$\partial_1 f = \begin{pmatrix} -x_2 \sin(x_1 x_2) \\ \cos(x_1 + x_2) \end{pmatrix}, \quad \partial_2 \partial_1 f = \begin{pmatrix} -x_1 x_2 \cos(x_1 x_2) \\ -\sin(x_1 + x_2) \end{pmatrix}$$

(iii) $f(x_1, x_2, x_3) = \exp(x_1 + 2x_2 + 3x_3)$:
$\partial_1 f = f$, $\partial_2 f = 2\exp(x_1 + 2x_2 + 3x_3) = 2f$, $\partial_3 f = 3f \quad \rightsquigarrow$

$$\partial^{(3,1,2)} f = \partial_1^3 \partial_2 \partial_3^2 f = 1^3 \cdot 2 \cdot 3^2 f = 18f$$

Beispiel

Partielle Ableitungen der Funktion

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \exp(\mathrm{i}(\omega^{\mathrm{t}} x) = \exp(\mathrm{i}(\omega_1 x_1 + \cdots + \omega_n x_n))$$

(ebene Welle)

Kettenregel $\quad \rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} \partial_k f(x) &= \mathrm{i}\omega_k \exp(\mathrm{i}\omega^{\mathrm{t}} x) \\ \partial_\ell \partial_k f(x) &= (\mathrm{i}\omega_\ell)(\mathrm{i}\omega_k) \exp(\mathrm{i}\omega^{\mathrm{t}} x) \end{aligned}$$

und somit

$$\partial^\alpha f(x) = (\mathrm{i}\omega)^\alpha \exp(\mathrm{i}\omega^{\mathrm{t}} x) = \mathrm{i}^{|\alpha|} y^\alpha \exp(\mathrm{i}\omega^{\mathrm{t}} x)$$

mit $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ und $\omega^\alpha = \omega_1^{\alpha_1} \cdots \omega_n^{\alpha_n}$
z.B. ($n = 2$):

$$\partial^{(3,4)} f(x) = \underbrace{\mathrm{i}^7}_{-\mathrm{i}} \omega_1^3 \omega_2^4 \exp(\mathrm{i}(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2))$$