Kritischer Punkt

Für eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bezeichnet man $x = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{t}}$ als kritischen Punkt, wenn $\operatorname{grad} f(x) = (0, \ldots, 0)^{\mathrm{t}}$. Ist f zweimal stetig differenzierbar, so kann f in einer Umgebung von x durch eine quadratische Taylor-Approximation angenähert werden:

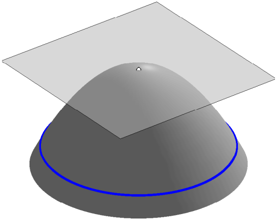
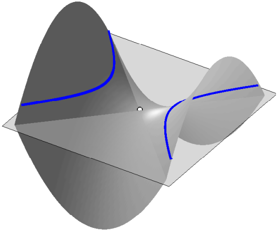
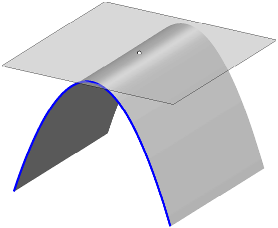
$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + \frac{1}{2} \Delta x^{\mathrm{t}} Hf(x) \Delta x \,.$$

Der Typ des kritischen Punktes, d.h. die Form des Funktionsgraphen in einer Umgebung von x, wird somit durch die Eigenwerte λ_k der Hesse-Matrix $\mathrm{H}\, f(x)$ bestimmt:

- Elliptischer Punkt:
  Alle Eigenwerte λ_k sind ungleich Null und haben das gleiche Vorzeichen. Die Funktion f hat in diesem Fall ein lokales Minimum ($\lambda_k > 0$) oder lokales Maximum ($\lambda_k < 0$) bei x.

- Hyperbolischer Punkt:
  Es gibt Eigenwerte λ_k mit verschiedenem Vorzeichen. In jeder Umgebung von x existieren dann sowohl kleinere als auch größere Funktionswerte als $f(x)$. Demzufolge bezeichnet man x als Sattelpunkt.
- Parabolischer Punkt:
  Mindestens ein Eigenwert λ_k ist Null, und alle anderen Eigenwerte haben das gleiche Vorzeichen. In diesem Fall können Terme höherer Ordnung das lokale Verhalten beieinflussen. Der kritische Punkt kann ein Sattelpunkt oder ein lokales Extremum sein.
- Flachpunkt:
  Alle Eigenwerte λ_k sind Null. Für eine glatte Funktion gilt dann $\|f(x+\Delta x) - f(x)\| \leq c\|\Delta x\|^3$, d.h. f wird in einer Umgebung von x mit hoher Ordnung durch eine waagrechte Ebene approximiert.

Die Motivation für die Bezeichnungen ist die Form der Höhenlinien im bivariaten Fall.

elliptischer Punkt hyperbolischer Punkt parabolischer Punkt

Bei Funktionen von zwei Veränderlichen kann der Typ anhand der Determinante und Spur der Hesse-Matrix klassifiziert werden. Ist $\det \mathrm{H}\, f(x) > 0$ (< 0), so ist x ein lokales Extremum (ein Sattelpunkt). Für ein Minimum bzw. ein Maximum ist $\operatorname{Spur} \mathrm{H}\, f(x) > 0$ bzw. < 0. Verschwindet die Determinante und ist die Hesse-Matrix nicht Null, so ist der Punkt parabolisch.

Beispiel

kritische Punkte der Funktion

$$f(x,y) = y(1 - x^2 - y^2)$$

Gradient und Hesse-Matrix

$$\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} -2xy \\ 1 - x^2 - 3y^2 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{H} f = \begin{pmatrix} -2y & -2x \\ -2x & -6y \end{pmatrix}$$

$\operatorname{grad} f = (0,0)^{\mathrm{t}} \quad \iff$

$$xy = 0 \quad \wedge \quad x^2 = 1 - 3y^2$$

$\leadsto$ kritische Punkte

$$(0, \pm 1/\sqrt{3}), \quad (\pm 1, 0)$$

entsprechende Hesse-Matrizen

$$\begin{pmatrix} \mp 2/\sqrt{3} & 0 \\ 0 & \mp 6/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & \mp 2 \\ \mp 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Punkte $(x, y) = (0, \pm 1/\sqrt{3})$:

$$\det(\mathrm{H}\, f) = (\mp 2/\sqrt{3})(- \mp 6/\sqrt{3} = 4 > 0$$

$\implies$ lokale Extrema

$$\mathrm{Spur}(\mathrm{H}\, f) = (- \mp 2/\sqrt{3}) + (- \mp 6/\sqrt{3}) = \mp 8/\sqrt{3}$$

$\implies$ lokales Minimum bei $(0, -1/\sqrt{3})$ (Spur positiv) und lokales Maximum bei $(0, 1/\sqrt{3})$ (Spur negativ)
Funktionswerte: $f(0, \pm 1/\sqrt{3}) = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}(1 - 1/3) = \frac{2}{9}\sqrt{3}$

Punkte $(x, y) = (\pm 1, 0)$

$$\det(\mathrm{H}\, f) = -(\mp 2)(\mp 2) = -4 < 0$$

$\rightsquigarrow$ Sattelpunkte mit Funktionswert $f(\pm 1, 0) = 0$

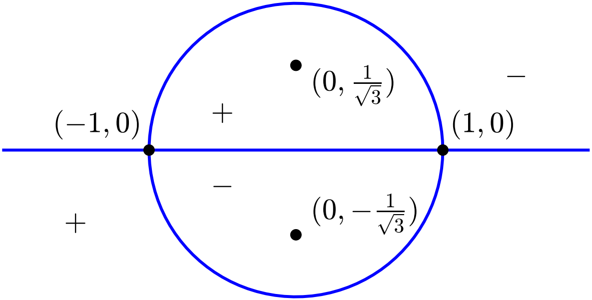
keine globalen Extrema, da

$$f(x, \pm 1) = \pm(1 - x^2 - 1) = \mp x^2 \to \mp\infty \text{ für } x \to \infty$$

Alternative Methode

Typbestimmung anhand der Nullstellenmenge und der sich daraus ergebenden Vorzeichenverteilung von f

$$f(x,y) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y = 0 \quad \vee \quad x^2 + y^2 = 1$$



Sattelpunkte an Schnittpunkten mit Vorzeichenwechsel
lokale Extrema in den von der Nullstellenmenge eingeschlossenen beschränkten Bereichen

Beispiel

kritische Punkte der Funktion

$$f(x,y) = (y - x + x^2)y$$

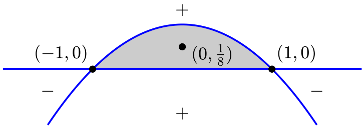
$$\operatorname{grad} f = (-1+2x)y,\ 2y - x + x^2)^{\mathrm{t}} = (0,0)^{\mathrm{t}}$$

$\rightsquigarrow$ kritische Punkte $(0,0)$, $(1,0)$, $(1/2, 1/8)$

(i) Typbestimmung anhand der Vorzeichenverteilung von f:

positive und negative Bereiche begrenzt durch die Gerade $G:\ y = 0$ und die Parabel $P:\ y = x - x^2$

Sattelpunkte an den Schnittpunkten von G und P, denn in jeder Umgebung existieren sowohl positive als auch negative Werte



lokales Minimum im grauen Bereich; f ist im Innern negativ und Null auf dem Rand

(ii) Typbestimmung mit Hilfe der Hesse-Matrix:

$$\mathrm{H}\, f = \begin{pmatrix} 2y & 2x-1 \\ 2x-1 & 2 \end{pmatrix}$$

Einsetzen der kritischen Punkte $\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} \mathrm{H}\, f(0,0) &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\ \mathrm{H}\, f(1,0) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ \mathrm{H}\, f(1/2,1/8) &= \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Sattelpunkte bei $(0,0)$ und $(1,0)$, da $\det(\mathrm{H}\, f) < 0$
lokales Minumum bei $(1/2,1/8)$, da $\det(\mathrm{H}\, f) > 0$ und $\mathrm{Spur}(\mathrm{H}\, f) > 0$