Konvergenz von Vektoren

Eine Folge von Vektoren $x_k \in \mathbb{R}^n$ konvergiert gegen einen Vektor x_*,

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x_* \quad \text{bzw.} \quad x_k \to x_* \text{ für } k \to \infty\,,$$

wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein Index k_ε existiert mit

$$|x_k - x_*| < \varepsilon \quad \text{für } k > k_\varepsilon\,.$$

Mit anderen Worten enthält jede ε-Umgebung

$$B_\varepsilon(x_*) = \{y:\ |y - x_*| < \varepsilon\}$$

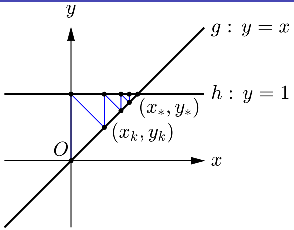
alle bis auf endlich viele Folgenelemente.
Äquivalent zur Konvergenz von (x_k) ist die Konvergenz aller Komponenten der Folge, d.h. es können eindimensionale Konvergenzkriterien herangezogen werden.

Beispiel

alternierende Projektion auf zwei Geraden

$\rightsquigarrow$ Konvergenz der Folge $(x_k, y_k)^t$ gegen den Schnittpunkt $(x_*, y_*)^t$

Illustration für die abgebildeten Geraden



$$\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3/4 \\ 3/4 \end{pmatrix}, \ldots \to \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Konvergenz der ersten Komponente:

$$x_{2k} = x_{2k+1} = 1 - (1/2)^k \to 1\,,$$

denn

$$\left|1 - 1 + (1/2)^k\right| = (1/2)^k < \varepsilon \quad \text{für } k > k_\varepsilon = -\operatorname{ld}\varepsilon$$