Kontrahierende Abbildung

Eine Abbildung

$$g: \; D \to D, \quad D \subseteq \mathbb{R}^n ,$$

ist kontrahierend, wenn in einer geeigneten Norm

$$\|g(x) - g(y)\| \le c \, \|x - y\|, \quad x, y \in D ,$$

mit $c < 1$ gilt.

Die Konstante c wird als Kontraktionskonstante von g bezeichnet. Sie kann für eine konvexe Menge D mit Hilfe der Jacobi-Matrix durch

$$c \le \sup_{x \in D} \|g'(x)\|$$

abgeschätzt werden mit der Matrixnorm $\|J\| = \max_{\|x\|=1} \|Jx\|$.

Beispiel

Richardson-Iteration zur Lösung eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$ für eine symmetrische positiv definite Matrix: A

$$x \mapsto g(x) = x - \omega(Ax - b)$$

kontrahierend, falls ω genügend klein gewählt wird

Begründung:

$$g(x) - g(y) = Q(x - y), \quad Q = E - \omega A$$

Eigenwerte von Q:

$$\varrho_k = 1 - \omega\lambda_k$$

mit $\lambda_k > 0$ den Eigenwerten von A

$\omega = 1/\max_k \lambda_k \quad \Longrightarrow \quad \varrho_k \geq 0$ und

$$c = \|Q\| = \max_k \varrho_k = 1 - (\min_k \lambda_k)/(\max_k \lambda_k) < 1$$

bei Verwendung der der euklidischen Norm zugeordneten Matrixnorm $\|\ \|$