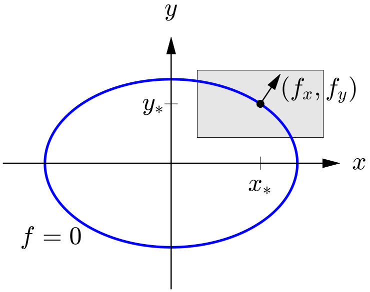
Implizite Funktionen

Für eine stetig differenzierbare bivariate Funktion f ist die Gleichung $f(x, y) = 0$ in der Umgebung einer Lösung (x_*, y_*) nach y auflösbar,

$$f(x, y) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y = g(x),\ x \approx x_*\,,$$

falls $f_y(x_*, y_*) \neq 0$. Diese hinreichende Bedingung bedeutet, dass die Tangente an die durch die Gleichung definierte Kurve in der xy-Ebene im Punkt (x_*, y_*) nicht parallel zur y-Achse ist.



Die implizit definierte Funktion g lässt sich im allgemeinen nicht explizit angeben. Jedoch kann die Ableitung durch Differenzieren der Gleichung $f(x, g(x)) = 0$ bestimmt werden:

$$g'(x) = -f_y(x, g(x))^{-1} f_x(x, g(x))\,.$$

Die Berechnung höherer Ableitungen ist ebenfalls auf diese Weise möglich.

Allgemeiner ist eine hinreichende Bedingung für die Auflösbarkeit einer Gleichung $f(z_1, \ldots, z_{n+1}) = 0$ nach z_k in einer Umgebung einer Lösung z_*, dass $\partial_k f(z_*) \neq 0$, d.h. die k-te Komponente der Normale der durch die Gleichung definierten Fläche in $\mathbb{R}^{n+1}$ muss im Punkt z_* ungleich null sein.

Ein analoges Kriterium charakterisiert die lokale Auflösbarkeit eines Gleichungssystems

$$f_k(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) = 0, \quad k = 1, \ldots, n\,,$$

mit stetig differenzierbaren $m+n$-variaten Funktionen f_k. Ist

$$\det f_y(x_*, y_*) \neq 0, \quad f_y = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n} \end{pmatrix},$$

so definiert das Gleichungssystem implizit eine Funktion

$$g:\ x \mapsto y = g(x), \quad x \approx x_*\,,$$

die die Lösungsmenge des Gleichungssystems in der Ungebung von (x_*, y_*) eindeutig parametrisiert: $f(x,y) = 0 \iff y = g(x_1, \ldots, x_m)$, $x \approx x_*$. Die Funktion $g = (g_1, \ldots, g_n)^{\mathrm{t}}$ ist stetig differenzierbar und besitzt die $n \times m$-Jacobi-Matrix

$$g' = \frac{\partial(g_1, \ldots, g_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_m)} = -(f_y)^{-1} f_x, \quad f_x = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{pmatrix}.$$

Ein entsprechendes Resultat gilt nach Permutation der Variablen, d.h. man kann Gleichungen

$$f_k(z_1, \ldots, z_{m+n}) = 0, \quad k = 1, \ldots, n\,,$$

lokal nach $z_{k_1}, \ldots, z_{k_n}$ auflösen, wenn die Spalten $k_1, \ldots, k_n$ der Jacobi-Matrix $f'(z_*)$ linear unabhängig sind.

Das Kriterium für die Auflösbarkeit nichtlinearer Gleichungssysteme wird plausibel, wenn man linearisiert, d.h. die Funktion $f = (f_1, \ldots, f_n)^{\mathrm{t}}$ durch ihre lineare Taylor-Approximation ersetzt:

$$f(x, y) \approx \underbrace{f(x_*, y_*)}_{(0,\ldots,0)^{\mathrm{t}}} + \underbrace{f_x(x_*, y_*)}_{A}(x - x_*) + \underbrace{f_y(x_*, y_*)}_{B}(y - y_*)\,.$$

Offensichtlich ist das lineare Gleichungssystem

$$(0, \ldots, 0)^{\mathrm{t}} = A(x - x_*) + B(y - y_*)$$

nach y auflösbar, wenn die Matrix B invertierbar ist.

Beweis

betrachte die Abbildung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto u(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ f(x,y) \end{pmatrix}$$

von $\mathbb{R}^{m+n}$ nach $\mathbb{R}^{m+n}$ in einer Umgebung von (x_*, y_*)

invertierbare Jacobi Matrix

$$u'(x_*, y_*) = \begin{pmatrix} E & 0_{m\times n} \\ f_x & f_y \end{pmatrix}\Bigg|_{(x_*,y_*)}, \quad E : m \times m \,\text{Einheitsmatrix}$$

$\Longrightarrow$ lokale Existenz einer Umkehrfunktion $u^{-1} = (v_1, \ldots, v_{m+n})^{\mathrm{t}}$

$$u(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ f(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0_{n\times 1} \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = v(x, 0_{n\times 1}),$$

d.h. $y = g(x) = (v_{m+1}(x, 0, \ldots, 0), \ldots, v_{m+n}(x, 0, \ldots, 0))^{\mathrm{t}}$

Differenzieren von $0_{n\times 1} = f(x, g(x))$ nach $x \quad \Longrightarrow$

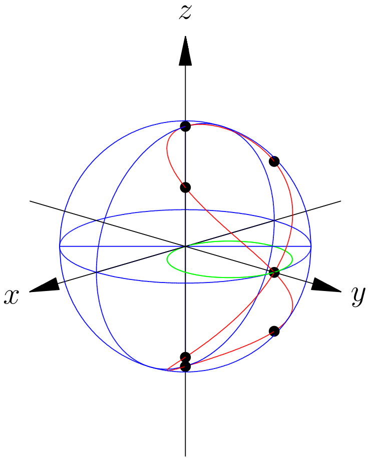
$$0_{n\times m} = f_x + f_y g' ,$$

d.h. die explizite Formel für die Jacobi-Matrix g'

Beispiel

Vivianische Kurve (Schnitt der Einheitssphäre mit einem Zylinder)

$$C:\ t \mapsto (\sin t \cos t, \sin^2 t, \cos t)^{\mathrm{t}}, \quad t \in [0, 2\pi]$$



implizite Form

$$
\begin{aligned}
f(x,y,z) &= x^2+y^2+z^2-1 &= 0 \\
g(x,y,z) &= x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4} &= 0
\end{aligned}
$$

Jacobi-Matrix

$$
\begin{pmatrix} f_x & f_y & f_z \\ g_x & g_y & g_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 2x & 2y-1 & 0 \end{pmatrix}
$$

Satz über implizite Funktion $\implies$
Bedingung für eine Parametrisierung durch eine der Koordinaten x, y, z

(i) Parametrisierung bezüglich x, d.h. auflösen nach y und z:
hinreichende Bedingung: Invertierbarkeit von

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,z)} = \begin{pmatrix} 2y & 2z \\ 2y-1 & 0 \end{pmatrix}$$

erfüllt für $z \neq 0$ und $y \neq 1/2$

$g = x^2 + (y-1/2)^2 - 1/4 = 0$, $f - g = z^2 - 1 + y = 0 \quad \rightsquigarrow$

$$y(x) = \frac{1}{2} + \sigma\sqrt{\frac{1}{4} - x^2}, \quad z(x) = \sigma'\sqrt{\frac{1}{2} - \sigma\sqrt{\frac{1}{4} - x^2}}$$

wobei die Vorzeichen $\sigma, \sigma' \in \{-1, 1\}$ entsprechend den einzelnen Zweigen gewählt werden müssen

Die Parametrisierungen sind singulär in den Punkten mit $z = 0$ oder $y = 1/2$:

$$(0,1,0)^{\mathrm{t}}, \quad (1/2, 1/2, \pm\sqrt{2}/2)^{\mathrm{t}}, (-1/2, 1/2, \pm\sqrt{2}/2)^{\mathrm{t}}$$

geometrisch hinreichend für eine Parametrisierung bzgl. x:
Tangentenrichtung nicht orthogonal zu $(1,0,0)^{\mathrm{t}}$, d.h. mit nichttrivialer Komponente in x-Richtung

(ii) Parametrisierung bezüglich y und z:
hinreichende Bedingungen

$$\det\begin{pmatrix} 2x & 2z \\ 2x & 0 \end{pmatrix} = -4xz \neq 0, \quad \det\begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2x & 2y-1 \end{pmatrix} = -2x \neq 0$$

keine lokale Parametrisierung (weder nach x, y oder z) im Punkt $(0,1,0)^{\mathrm{t}}$
Jacobi-Matrix

$$\left.\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y,z)}\right|_{(0,1,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Rang der Jacobi-Matrix gleich 1 $\quad\rightsquigarrow\quad$ Doppelpunkt der Kurve

Beispiel

Lokale Auflösbarkeit der Gleichung

$$f(x, y, z) = x\mathrm{e}^y - yz = 0$$

nach einer Variablen auflösbar, falls die entsprechende partielle Ableitung nicht verschwindet

Gradient

$$(f_x, f_y, f_z)^\mathrm{t} = (\mathrm{e}^y, x\mathrm{e}^y - z, -y)^\mathrm{t}$$

(i) $\quad f_x > 0 \quad \Longrightarrow \quad f = 0$ für alle (x, y, z) nach x auflösbar:

$$x = yz\mathrm{e}^{-y}$$

(ii) Auflösen nach z für $y \neq 0$ möglich ($f_z \neq 0$):

$$z = x\mathrm{e}^y / y$$

(iii) Keine elementare Auflösbarkeit nach y:
Satz über implizite Funktionen $\implies$ Auflösbarkeit in einer Umgebung einer Lösung (x_*, y_*, z_*), falls

$$f_y(x_*, y_*, z_*) = x_* e^{y_*} - z_* \neq 0$$

z.B. erfüllt für die Lösung $(0, 0, 1)$ der Gleichung: $f_y(0, 0, 1) = -1 \implies$

$$\exists g : \; f(x, y, z) = 0 \iff y = g(x, z), \quad (x, y, z) \approx (0, 0, 1)$$

Die Funktion g ist nicht explizit angebbar; aber der Gradient g' kann bestimmt werden:

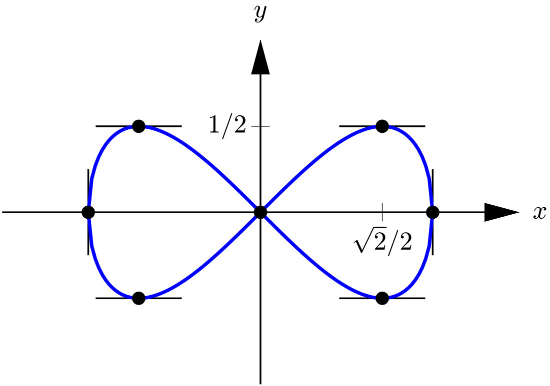
$$0 = f(x, g(x, z), z) \implies 0 = f_x + f_y g_x, \; 0 = f_z + f_y g_z$$

Auflösen nach den partiellen Ableitungen von g im Punkt (x_*, y_*, z_*)

$$\begin{aligned} g_x(0,1) &= \frac{-f_x(0,0,1)}{f_y(0,0,1)} = \frac{1}{-1} = -1 \\ g_z(0,1) &= \frac{-f_z(0,0,1)}{f_y(0,0,1)} = \frac{0}{-1} = 0 \end{aligned}$$

Beispiel

Parametrisierung der Lemniskate $C: \ p(x,y) = x^4 - x^2 + y^2 = 0$



$$\operatorname{grad} p = (-2x + 4x^3, 2y)^{\mathrm{t}}$$

Doppelpunkt bei $(0,0)$ ($\operatorname{grad} p(0,0) = (0,0)^{\mathrm{t}}$), keine eindeutige Auflösbarkeit nach x oder y

(i) Vertikale Tangente bei $(\pm 1, 0)$, $\operatorname{grad} p = (\pm 2, 0)^{\mathrm{t}}$:
lokale Auflösung von $p(x,y) = 0$ nach x (Parametrisierung bzgl. y) möglich:

$$x = \sigma \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - y^2}}$$

mit $\sigma = 1$ für $x \approx 1$ und $\sigma = -1$ für $x \approx -1$

(ii) Waagrechte Tangente bei $(\sigma_1\sqrt{2}/2, \sigma_2/2)$ mit $\sigma_k \in \{-1, 1\}$,
$\operatorname{grad} p \parallel (0,1)^{\mathrm{t}}$:
Auflösen von $p(x,y) = 0$ nach y $\quad\rightsquigarrow$

$$y = \sigma_2 \sqrt{x^2 - x^4}$$

(iii) Punkte (x_0, y_0) mit weder vertikaler noch horizontaler Tangente:
Auflösbarkeit sowohl nach x oder y
Bei Auflösung nach y folgt aus

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} p(x, y(x)) = p_x + p_y \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

dass

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -p_y^{-1} p_x = \frac{4x^3 - 2x}{2y}$$

$\rightsquigarrow$ Gleichung der Tangente im Punkt (x_0, y_0)

$$y - y_0 = \frac{4x_0^3 - 2x_0}{2y_0}(x - x_0)$$