Fehlerfortpflanzung bei multivariaten Funktionen

Für eine stetig differenzierbare Funktion $(x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{t}} \mapsto y = f(x)$ lassen sich die Auswirkungen von inakuraten Argumenten $x + \Delta x \approx x$ mit Hilfe der partiellen Ableitungen von f beschreiben. Für den absoluten Fehler gilt bei Vernachlässigung von Termen der Ordnung $o(|\Delta x|)$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \approx f_{x_1}(x)\Delta x_1 + \cdots + f_{x_n}(x)\Delta x_n \,.$$

Sind $|x_k|$, $|y| \neq 0$, so folgt für den relativen Fehler

$$\frac{\Delta y}{|y|} \approx c_1 \frac{\Delta x_1}{|x_1|} + \cdots + c_n \frac{\Delta x_n}{|x_n|}$$

mit den Konditionszahlen

$$c_k = \frac{\partial y}{\partial x_k} \frac{|x_k|}{|y|} \,.$$

Beispiel

Berechnung des Winkels φ von Polarkoordinaten aus kartesischen Koordinaten:

$$\varphi = f(x, y) = \arctan(y/x)$$

Bilden der partiellen Ableitungen: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \arctan t = \frac{1}{1+t^2}$, Kettenregel $\Longrightarrow$

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= \frac{1}{1 + (y/x)^2} \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2 + y^2} \\ f_y(x, y) &= \frac{1}{1 + (y/x)^2} \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

(i) Absoluter Fehler:

$$\Delta\varphi \approx f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y = -\frac{y\Delta x}{x^2 + y^2} + \frac{x\Delta y}{x^2 + y^2}$$

$|x|, |y| \le r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \Longrightarrow \quad$ mögliche Vergrößerung des absoluten Fehlers $\max(|\Delta x|, |\Delta y|)$ maximal um einen Faktor $2/r$

(ii) Relativer Fehler:

$$\frac{\Delta\varphi}{|\varphi|} \approx -\frac{y|x|}{(x^2+y^2)|\varphi|}\frac{\Delta x}{|x|} + \frac{x|y|}{(x^2+y^2)|\varphi|}\frac{\Delta y}{|y|}$$

$x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$ und $|\sin\varphi/\varphi| \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad$ Betrag der rechten Seite

$$\leq \left|\frac{\cos\varphi\,\sin\varphi}{\varphi}\right| \left(\frac{|\Delta x|}{|x|} + \frac{|\Delta y|}{|y|}\right) \leq 2\max\left(\frac{|\Delta x|}{|x|}, \frac{|\Delta y|}{|y|}\right)$$

Verstärkung des relativen Fehlers höchstens um einen Faktor 2