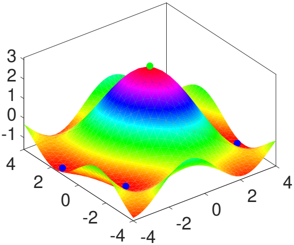
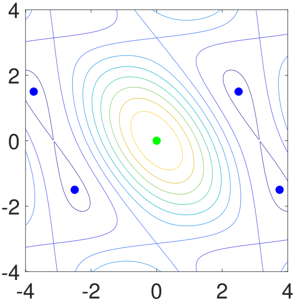
Extremwerte stetiger Funkionen

Eine stetige Funktion $f : \mathbb{R}^n \supseteq D \to \mathbb{R}$ besitzt auf einer kompakten Menge $K \subseteq D$ sowohl ein Minimum als auch ein Maximum.

Auf dem links abgebildeten Funktionsgraphen sind Minima und ein Maximum markiert. Bei den Niveaulinien erkennt man die Extremstellen durch geschlossene Kurven, die diese Punkte einschließen.





Äquivalenz von Normen

Jede Vektornorm $\|\cdot\|$ in $\mathbb{R}^n$ ist zur euklidischen Norm $|\cdot|$ äquivalent, d.h. es gibt positive Konstanten c_k mit

$$c_1\|x\| \leq |x| \leq c_2\|x\|$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Beweis

Die Ungleichungen sind skalierungsinvariant, d.h. invariant unter der Substitution $x \to sx$ mit $s \in \mathbb{R}$.

$\rightsquigarrow$ betrachte nur Vektoren x auf der Einheitssphäre

$$S: \; |x| = 1$$

$\|x\| \neq 0$ für $x \in S$ $\implies$ Stetigkeit der Funktion $x \mapsto |x| / \|x\|$ $(*)$

S kompakt $\implies$ $\exists$ positives Minimum c_1 und Maximum c_2

$(*)$ Beweis der Stetigkeit der Norm mit Hilfe der Dreiecksungleichung:

$$\|x\| \leq \|x - y\| + \|y\|, \quad \|y\| \leq \|y - x\| + \|x\|$$

$\implies$ (nach Umformung)

$$\pm(\|x\| - \|y\|) \leq \|x - y\| \quad \text{bzw.} \quad |\, \|x\| - \|y\| \,| \leq \|x - y\|\,,$$

d.h. $\| \;\|$ ist Lipschitz-stetig mit Konstante 1