Cauchy-Kriterium für Vektoren

Eine Folge von Vektoren $x_k \in \mathbb{R}^n$ konvergiert genau dann, wenn sie eine Cauchy-Folge ist, d.h. wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein k_ε existiert mit

$$|x_\ell - x_k| < \varepsilon \quad \text{für}\, \ell, k > k_\varepsilon\,.$$

Dies ist gleichbedeutend damit, dass jede der n Komponenten der Folge $x_1, x_2, \ldots$ konvergiert.

Aufgrund der Äquivalenz von Normen im $\mathbb{R}^n$ kann anstelle der Euklidischen Norm auch jede andere Vektornorm verwendet werden.

Eine oft einfach zu verifizierende hinreichende Bedingung für das Cauchy-Kriterium ist geometrische Konvergenz. In diesem Fall gilt

$$|x_{k+1} - x_k| \leq c|x_k - x_{k-1}|$$

mit einer Konstanten $c < 1$.

Beweis

Geometrische Konvergenz $\implies$ Cauchy-Kriterium

Dreiecksungleichung, Abschätzung für benachbarte Folgenelemente

$\implies$

$$
\begin{aligned}
|x_\ell - x_k| &= |x_\ell - x_{\ell-1} + x_{\ell-1} - x_{\ell-2} + \cdots + x_{k+1} - x_k| \\
&\le |x_\ell - x_{\ell-1}| + |x_{\ell-1} - x_{\ell-2}| + \cdots + |x_{k+1} - x_k| \\
&\le c\,\lambda^{\ell-1} + c\,\lambda^{\ell-2} + \cdots + c\,\lambda^k \\
&= c\,\lambda^k\,(1 + \lambda + \lambda^2 + \cdots) \le \frac{c}{1-\lambda}\lambda^k = c'\,\lambda^k < \varepsilon
\end{aligned}
$$

für $\ell > k > k_\varepsilon = \ln(\varepsilon/c')/\ln\lambda$

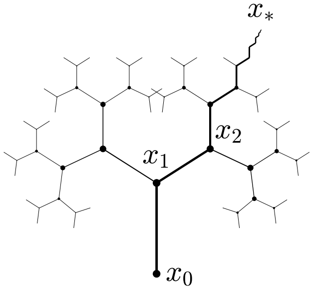
Beispiel

binärer Baum:

neue Segmente jeweils um den Faktor λ ($0 < \lambda < 1$) verkürzt und in einem Winkel von ϑ angefügt

geometrische Konvergenz sukzessiver Verzweigungspunkte x_k:

$$|x_{k+1} - x_k| = c\lambda^k$$



Cauchy-Folge, denn

$$\begin{aligned} |x_\ell - x_k| &\le |x_\ell - x_{\ell-1}| + |x_{\ell-1} - x_{\ell-2}| + \cdots + |x_{k+1} - x_k| \\ &\le c\,\lambda^{\ell-1} + c\,\lambda^{\ell-2} + \cdots + c\,\lambda^k \\ &= c\,\lambda^k\,(1 + \lambda + \lambda^2 + \cdots) \le \frac{c}{1-\lambda}\lambda^k = c'\,\lambda^k < \varepsilon \end{aligned}$$

für $\ell > k > k_\varepsilon = \ln(\varepsilon/c')/\ln\lambda$