Ist g eine kontrahierende Abbildung, die eine nicht leere, abgeschlossene Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ in sich abbildet, d.h. gilt

- $D = \overline{D} \neq \emptyset$
- $x \in D \implies g(x) \in D$
- $\|g(x) - g(y)\| \leq c\|x - y\| \;\; \forall x, y \in D$ mit $c < 1$,

dann besitzt g einen eindeutigen Fixpunkt $x_* = g(x_*) \in D$.

Ausgehend von einem beliebigen Punkt $x_0 \in D$ kann x_* durch die Iterationsfolge

$$x_0,\, x_1 = g(x_0),\, x_2 = g(x_1),\, \ldots$$

approximiert werden.

Für den Fehler gilt

$$\|x_* - x_\ell\| \leq \frac{c^\ell}{1-c}\,\|x_1 - x_0\|$$

d.h. die Iterationsfolge konvergiert für jeden Startpunkt linear.

Der Fixpunktsatz gilt allgemeiner in vollständigen metrischen Räumen. Da die Translationsinvarianz und Homogenität der Norm nicht benötigt wird, kann man $\|x - y\|$ durch eine allgemeine Abstandsfunktion $d(x, y)$ ersetzen.

Beweis

(i) $g(D) \subseteq D \implies x_\ell \in D$ für alle $\ell > 0$

(ii) Kontraktionsbedingung $\implies$

$$\|x_{\ell+1} - x_\ell\| = \|g(x_\ell) - g(x_{\ell-1})\| \le c\,\|x_\ell - x_{\ell-1}\|$$

Iteration $\rightsquigarrow$

$$\|x_{\ell+1} - x_\ell\| \le c^\ell\,\|x_1 - x_0\|$$

(iii) Dreiecksungleichung $\implies$

$$\begin{aligned}
\|x_k - x_\ell\| &\le \|x_k - x_{k-1}\| + \|x_{k-1} - x_{k-2}\| + \cdots + \|x_{\ell+1} - x_\ell\| \\
&\le (c^{k-1} + \cdots + c^\ell)\|x_1 - x_0\| = \tfrac{c^k - c^\ell}{c-1}\,\|x_1 - x_0\| \\
&\le \tfrac{c^\ell}{1-c}\|x_1 - x_0\|
\end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ Cauchy-Konvergenz der Folge $x_0, x_1, \ldots$ gegen einen Grenzwert x_*

(iv) Kontraktionsbedingung $\implies$

$$\|g(x_*) - x_*\| \le \|g(x_*) - g(x_k)\| + \|g(x_k) - x_*\| \le c\,\|x_* - x_k\| + \|x_{k+1} - x_*\|$$

Grenzwert $k \to \infty$ $\implies$ x_* Fixpunkt

(v) x_* eindeutig, da

$$\|\tilde{x}_* - x_*\| = \|g(\tilde{x}_*) - g(x_*)\| \le c\|\tilde{x}_* - x_*\|$$

mit $c < 1$

(vi) Abschätzung für den Fehler $\Longleftarrow$ Bilden des Grenzwerts für $k \to \infty$ in der Ungleichung (iii) für $\|x_k - x_\ell\|$

Beispiel

Gestörtes lineares System:

$$Ax + \varepsilon f(x) = b$$

mit einer quadratischen invertierbaren Matrix A und einer Lipschitz-stetigen Funktion f (Konstante c_f)

Lösung mit Hilfe der Iteration

$$x \to g(x) = A^{-1}(b - \varepsilon f(x))$$

Prüfe die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes für die abgeschlossene Kugel um $p = A^{-1}b$ mit Radius r,

$$D = \{y : \; \|y - p\| \leq r\}, \quad p = A^{-1}b$$

(i) $g(D) \subset D$:
für $x \in D$

$$\|g(x) - p\| = \varepsilon \|A^{-1} f(x)\| \leq \varepsilon \|A^{-1}\| \max_{y \in D} \|f(y)\|$$

$g(x) \in D$ (Abstand zu $p \leq r$), falls

$$\varepsilon \leq \frac{r}{\|A^{-1}\| \max_{y \in D} \|f(y)\|}$$

(ii) Kontraktionsbedingung:

$$\|g(x) - g(y)\| = \varepsilon \|A^{-1}(f(x) - f(y)\| \leq \underbrace{\varepsilon \|A^{-1}\| c_f}_{c} \|x - y\|$$

mit $c < 1$, falls

$$\varepsilon < \frac{1}{\|A^{-1}\| c_f}$$

Beide Bedingungen, (i) und (ii), sind für hinreichend kleines ε erfüllt.