Wurzelkriterium

Existiert $q \in [0,1)$ mit

$$\sqrt[n]{|a_n|} \le q, \quad n > n_0\,,$$

so ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent. Ist hingegen

$$|a_n| \ge 1$$

für unendlich viele n, so ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergent.

Die hinreichende Bedingung für Konvergenz lässt sich auch in der äquivalenten Form

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$$

schreiben.

Der Grenzwert der n-ten Wurzeln muss nicht existieren; die etwas stärkere Forderung $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ ist natürlich ebenfalls hinreichend für die Konvergenz der Reihe.

Beweis

(i) Konvergenz:

$$|a_n| \leq q^n \quad \text{mit} \quad q < 1 \quad \text{für} \quad n > n_0$$

$\implies$ geometrische Reihe als Majorante

(ii) Limes Superior:

Definition: $\limsup_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \bar{b}_n,\ \bar{b}_n = \sup_{k\geq n} b_k$

$(\bar{b}_n)$ monoton fallend $\implies$

$$\lim_n \bar{b}_n < 1 \quad \iff \quad \bar{b}_n < 1,\ n > n_0 \quad \iff \quad \sup_{n>n_0} b_n < 1$$

$b_n = \sqrt[n]{|a_n|} \quad \implies$ Äquivalenz der Konvergenzkriterien

(iii) Divergenz:

$$|a_n| \geq 1 \quad \text{für unendlich viele} \quad n$$

$\implies$ $a_1, a_2, \ldots$ ist keine Nullfolge

Beispiel

Anwendung des Wurzelkriteriums bei Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, die n-te Potenzen enthalten

(i) $a_n = n\,(-2)^{-n}$:
n-te Wurzeln $w_n = \sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{n}\,2^{-1}, \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
$\implies \quad w_n \to 1/2 < 1$ und somit absolute Konvergenz nach dem Wurzelkriterium

algemeinere Reihe: $\sum_{n=0}^{\infty} n^r\, x^{-n}, \quad w_n = \left(\sqrt[n]{n}\right)^r /|x| \to 1/|x|$
Wurzelkriterium $\implies$

- Konvergenz für $1/|x| < 1$, d.h. $|x| > 1$
  Divergenz für $|x| < 1$
- keine Aussage für $|x| = 1$
  andere Methode $\rightsquigarrow$
  Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} n^r$ $(x = 1)$ für $r < -1$,
  Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} n^r\,(-1)^n$ $(x = -1)$ für $r < 0$

(ii) $a_n = (3 + \sin n)^{-n}$:
kein Grenzwert der n-ten Wurzeln $w_n = \sqrt[n]{|a_n|} = |3 + \sin n|^{-1}$
$\rightsquigarrow$ Notwendigkeit des Limes Superior:

$$\limsup_{n\to\infty} w_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} |3+\sin n|^{-1} = \lim_{n\to\infty} 2^{-1} = 1/2 \quad \Longrightarrow \quad \text{Konvergenz}$$

eingfacher: unmittelbare Anwendung der Abschätzung

$$w_n \leq |3-1|^{-1} = 1/2 < 1$$

(erste Variante der Wurzelkriterien)