Vergleichskriterium

Gilt

$$a_n \le b_n \le c_n, \quad n > n_0\,,$$

mit $\lim a_n = a$ und $\lim c_n = c$, so ist

$$a \le \liminf b_n \le \limsup b_n \le c\,.$$

Insbesondere folgt aus $a = c$ die Konvergenz der Folge (b_n):

$$a = \lim_{n\to\infty} b_n = c\,.$$

Beweis

Grenzwertbildung erhält Ungleichungen:

$$\inf_{k\geq n} a_k \leq \inf_{k\geq n} b_k \quad \implies \quad a = \lim_{n\to\infty} a_n = \underline{\lim}\, a_n \leq \underline{\lim}\, b_n$$

analog: $\overline{\lim}\, b_n \leq c$

$a = c \quad \implies$

$$a - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < a + \varepsilon$$

für $n > n_\varepsilon$

$\implies \quad |b_n - a| < \varepsilon$ für $n > n_\varepsilon$ und somit $b_n \to a$

Beispiel

Anwendung des Vergleichskriteriums auf die Folge

$$b_n = \sqrt[n]{n}, \quad n = 1, 2, \ldots\,,$$

und Verallgemeinerungen

(i) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$:
Beweis mit Vergleichskriterium, angewandt auf die Ungleichungen

$$a_n = 1 \le \sqrt[n]{n} \le 1 + \frac{2}{\sqrt{n}} = c_n$$

unter Verwendung der bekannten Grenzwerte $\lim a_n = 1 = \lim c_n$
Begründung der rechten Ungleichung mit der binomischen Formel:

$$n \le (1 + 2/\sqrt{n})^n = 1 + n \cdot \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{4}{n} + \cdots\,,$$

denn

$$n - 1 \le \frac{n-1}{2} \cdot 4 = 2(n-1)$$

(ii) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^k} = 1$:
Beweis mit der Produktregel:

$$\sqrt[n]{n^k} = \left(\sqrt[n]{n}\right)\cdots\left(\sqrt[n]{n}\right)\,,$$

jeder der k (feste Anzahl) Faktoren strebt gegen 1
(iii) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p(n)} = 1, \quad p(n) = a_k n^k + \cdots + a_0$ mit $a_k > 0$:
Beweis durch Vergleich von $b_n = \sqrt[n]{p(n)}$ mit n-ten Wurzeln aus

$$p_-(n) = (a_k/2)n^k, \quad p_+(n) = (2a_k)n^k$$

Beispielsweise folgt die untere Schranke aus

$$\begin{aligned} p(n) - p_-(n) &= \frac{a_k}{2}n^k + \left[a_{k-1}n^{k-1} + \cdots + a_0\right] \\ &\geq \frac{a_k}{2}n^k - k \max_{0\leq j<k} |a_j| n^{k-1} \geq 0 \end{aligned}$$

für

$$n \geq \frac{k \max |a_j|}{a_k/2}$$

analoge Herleitung der oberen Schranke $p(n) \leq p_+(n)$