Taylor-Polynom

Das Taylor-Polynom

$$p_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

interpoliert die Ableitungen einer Funktion f im Punkt a bis zur Ordnung n, d.h. $p_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$, $k = 0, \ldots, n$.

Ist f $(n+1)$-mal stetig differenzierbar, so gilt

$$f(x) = p_n(x) + R, \quad R = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

für ein t zwischen a und x, d.h. der Fehler ist von der Ordnung $n+1$:

$$R = O((x-a)^{n+1})\,.$$

Beweis

(i) Übereinstimmung der Ableitungen:

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^k (x-a)^j \bigg|_{x=a} = 0, \quad j \neq k$$

$\Longrightarrow$

$$p_n^{(k)}(a) = \left(\frac{d}{dx}\right)^k \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \bigg|_{x=a} = f^{(k)}(a), \quad k \leq n$$

(k-te Ableitung von $(x-a)^k = k!$)

(ii) Restglied:
ergänze das Taylor-Polynom um einen weiteren Term:

$$q(y) = p_n(y) + c(y-a)^{n+1}$$

mit c so gewählt, dass $q(x) = f(x)$
$(q-f)(y)$: Nullstelle bei $y = x$ und $(n+1)$-fache Nullstelle bei $y = a$, denn

$$q^{(k)}(a) = p^{(k)}(a) + 0 = f^{(k)}(a), \quad k \leq n$$

Satz von Rolle $\implies$ Existenz einer Nullstelle t der $(n+1)$-ten Ableitung:

$$0 = q^{(n+1)}(t) - f^{(n+1)}(t) = c(n+1)! - f^{(n+1)}(t)$$

$\leadsto \quad c = f^{(n+1)}(t)/(n+1)!$ und

$$R = f(x) - p_n(x) = q(x) - p_n(x) = c(x-a)^{n+1}$$

$\leadsto \quad$ Form des Restglieds

Beispiel

Taylor-Polynome von Sinus und Kosinus

(i) Taylor-Polynome von $f(x) = \sin x$:
Ableitungen

$$f'(x) = \cos x,\ f''(x) = -\sin x,\ f'''(x) = -\cos x,\ f^{(4)}(x) = f = \sin x,\ \ldots$$

$$f'(0) = 1,\ f''(0) = 0,\ f'''(0) = -1,\ f^{(4)}(0) = 0,\ \ldots \quad \rightsquigarrow$$

$$\begin{aligned}
p_1(x) = p_2(x) &= x \\
p_3(x) = p_4(x) &= x - \frac{x^3}{6} \\
p_5(x) = p_6(x) &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}
\end{aligned}$$

sehr genaue Approximation für kleine x, z.B.

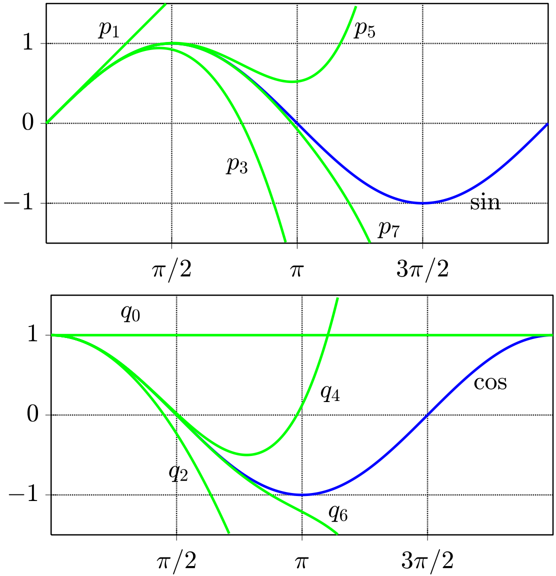
$$\sin 0.1 \approx p_4(0.1) = 0.09983...$$

Restglied

$$|R| = \frac{|f^{(5)}(t)|}{5\,!}\,(0.1-0)^5 \;=,\; \frac{|\cos t|}{5\,!}\,0.1^5 \;\leq\; \frac{1}{12000000} \;\leq\; 10^{-7}$$

(ii) Taylor-Polynome von $g(x) = \cos(x)$:

$$\begin{aligned}
q_0(x) = q_1(x) &= 1 \\
q_2(x) = q_3(x) &= 1 - \frac{x^2}{2} \\
q_4(x) = q_5(x) &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}
\end{aligned}$$


p_1
p_5
1
0
p_3
-1
sin
p_7
$\pi/2$
π
$3\pi/2$
q_0
1
q_4
cos
0
q_2
-1
q_6
$\pi/2$
π
$3\pi/2$

Beispiel

quadratisches Taylor-Polynom der Logarithmus-Funktion $f(x) = \ln x$ im Punkt $a = 1$

Ableitungen

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad f'''(x) = \frac{2}{x^3}$$

Auswertung bei $x = 1$ $\quad \rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} p(x) &= f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 \\ &= 0 + (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 \end{aligned}$$

Restglied

$$r(x) = f(x) - p(x) = \frac{1}{3!}\, f'''(t)\,(x-1)^3 = \frac{2}{6\,t^3}(x-1)^3$$

mit t zwischen x und 1

Abschätzung

$$|r(x)| \le \frac{1}{3} \left| \frac{x-1}{\min(1,x)} \right|^3$$

$\rightsquigarrow$ Fehlerschranke für $x \in [3/4, 5/4]$:

$$|r(x)| \le \frac{1}{3} \left| \frac{5/4-1}{3/4} \right|^3 = \frac{1}{81}$$