Taylor-Entwicklung der Umkehrfunktion

Die Taylor-Koeffizienten der Umkehrfunktion $g(x)$ einer Funktion f mit $f'(a) \neq 0$ im Punkt $b = f(a)$ lassen sich durch Differentiation von

$$g(f(x)) = x$$

bestimmen:

$$\begin{aligned}
&g(b) = a \\
&g'(b)\, f'(a) = 1 \quad \rightsquigarrow \quad g'(b) \\
&g''(b)\, f'(a)^2 + g'(b)\, f''(a) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad g''(b) \\
&g'''(b)\, f'(a)^3 + 3g''(b)\, f''(a)\, f'(a) + g'(b) f'''(a) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad g'''(b) \\
&\qquad \vdots
\end{aligned}$$

Wie angedeutet können die entstehenden Gleichungen sukzessive nach den Ableitungen $g'(b)$, $g''(b)$, $g'''(b), \ldots$ aufgelöst werden.

Beispiel

Umkehrfunktion des Sinus

Entwickeln von
$$f(x) = \sin x, \quad g(y) = \arcsin y$$
in der Umgebung von $x = a = 0$, $y = b = 0$

Differenzieren von $g(\sin x) = x \quad \rightsquigarrow$
$$\begin{aligned}
&g'(\sin x)\cos x = 1\\
&g''(\sin x)\cos^2 x - g'(\sin x)\sin x = 0\\
&g'''(\sin x)\cos^3 - 3g''(\sin x)\cos x \sin x - g'(\sin x)\cos x = 0
\end{aligned}$$

Einsetzen von $x = 0$, $\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0 \quad \rightsquigarrow$
$$\begin{aligned}
&g'(0) = 1\\
&g''(0) - 0 = 0 \quad \Longrightarrow \quad g''(0) = 0\\
&g'''(0) - 0 - g'(0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad g'''(0) = g'(0) = 1
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ $\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + O(x^5)$, ungerade Funktion

Beispiel

Umkehrfunktion $q(y)$ des kubischen Polynoms

$$p(x) = x^3 - 2x$$

in einer Umgebung von $(x, y) \approx (a, b) = (2, 4)$

Differenzieren von $p(q(y)) = y \quad \Longleftrightarrow \quad q(y)^3 - 2q(y) = y \rightsquigarrow$

$$\begin{aligned}
&3q^2q' - 2q' = 1 \\
&6q(q')^2 + 3q^2q'' - 2q'' = 0 \\
&6(q')^3 + 12qq'q'' + 6qq'q'' + 3q^2q''' - 2q''' = 0
\end{aligned}$$

Auswertung bei $y = 4$, $q(4) = 2 \quad \rightsquigarrow$

$$\begin{aligned}
&3 \cdot 4 \cdot q'(4) - 2q'(4) = 1 \quad \Longrightarrow \quad q'(4) = 1/10 \\
&6 \cdot 2 \cdot (1/10)^2 + 3 \cdot 4 \cdot q''(4) - 2q''(4) = 0 \quad \Longrightarrow \quad q''(4) = -3/250 \\
&6(1/10)^3 + 12 \cdot 2 \cdot (1/10) \cdot (-3/250) + 6 \cdot 2 \cdot (1/10) \cdot (-3/250) \\
&\qquad +3 \cdot 4 \cdot q'''(4) - 2 \cdot q'''(4) = 0 \quad \Longrightarrow \quad q'''(4) = 93/25000
\end{aligned}$$

erste Terme der Taylor-Entwicklung

$$\begin{aligned} q(y) &= q(4) + q'(4)(y-4) + \frac{q''(4)}{2}(y-4)^2 + \frac{q'''(4)}{6}(y-4)^3 + \cdots \\ &= 2 + \frac{1}{10}(y-4) - \frac{3}{500}(y-4)^2 + \frac{31}{50000}(y-4)^3 + \cdots \end{aligned}$$

Test der Genauigkeit für $y \approx 4$, z.B. $y = 4.1$:

$$\begin{aligned} x = q(4.1) &\approx 2 + \frac{1}{10}(y-4) - \frac{3}{500}(y-4)^2 + \frac{31}{50000}(y-4)^3 \\ &= 2 + \frac{1}{100} - \frac{3}{50000} + \frac{31}{50000000} \\ &= 2 + 0.01 - 0.00006 + 0.00000062 \\ &= 2.00994062 \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow \quad y \stackrel{!}{=} p(x) \approx p(2.00994062) \approx 4.100000078$ mit dem Fehler

$$\Delta y \approx 4.100000078 - 4.1 = 7.8 \cdot 10^{-8}$$