Stetigkeit

Eine Funktion f ist stetig im Punkt a, wenn für alle Folgen (x_n) mit Grenzwert a die Funktionswerte $f(x_n)$ gegen $f(a)$ konvergieren:

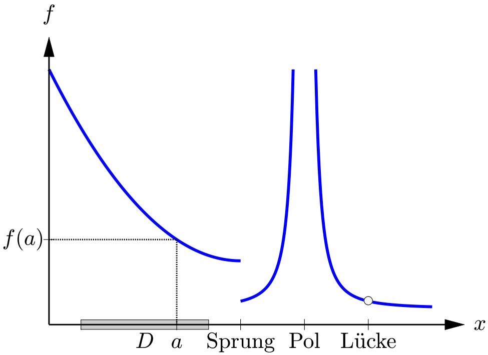
$$x_n \to a \quad \Longrightarrow \quad f(x_n) \to f(a)\,.$$

Nach Definition des Grenzwerts gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein δ_ε mit

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \quad \text{für} \quad |x - a| < \delta_\varepsilon\,,$$

und man schreibt $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

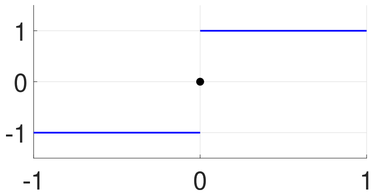
Man bezeichnet a als hebbare Definitionslücke, wenn f in einer Umgebung von a definiert ist und der Grenzwert $\lim_{x \to a} f(x)$ existiert, die Funktion f also stetig ergänzt werden kann.

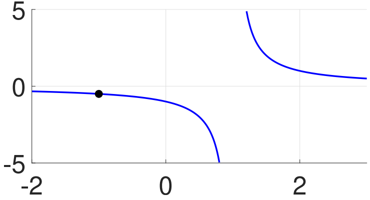


Eine Funktion ist stetig auf einem Intervall D, wenn sie in jedem Punkt von D stetig ist. Dies bedeutet, dass der Graph von f zusammenhängend ist, die Funktion besitzt keine Sprung- oder Polstellen.
Anschaulich bedeutet Stetigkeit, dass sich der Graph ohne abzusetzen zeichnen lässt.

Verschiedene Typen von Unstetigkeitsstellen

Signum-Funktion $f(x) = \operatorname{sign}(x)$ Rationale Funktion $g(x) = \dfrac{x+1}{x^2-1}$





- $f(x) = \operatorname{sign}(x)$:
  Sprung bei 0, Funktionswert $\operatorname{sign}(0) = 0$, kein Grenzwert von $\operatorname{sign}(x)$ für $x \to 0$
- $g(x) = \dfrac{x+1}{x^2-1}$:
  Definitionslücken bei $x = \pm 1$
  Polstelle bei $x = 1$:

$$x \to 1 \quad \Longrightarrow \quad |g(x)| \to \infty$$

  hebbare Definitionslücke bei $x = -1$:

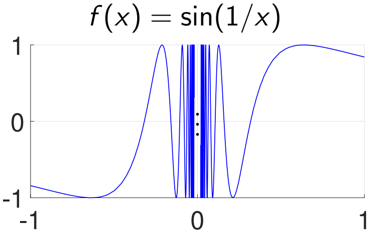
$$g(x) = \frac{x+1}{x^2-1} = \frac{x+1}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{x-1}, \quad x \neq -1$$

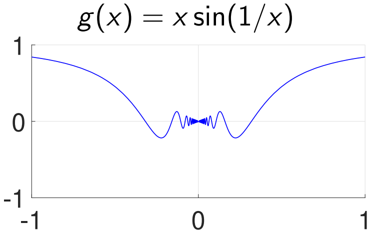
  Nach Ergänzen des Funktionswertes $g(-1) = -\frac{1}{2}$ ist g stetig bei $x = -1$.

Beispiel

Verschiedene Typen von Unstetigkeitsstellen

- $f(x) = \sin(1/x)$: unstetig bei $x = 0$ wegen Oszillationen zwischen ± 1
- $g(x) = x \sin(1/x)$: hebbare Definitionslücke bei $x = 0$
  $0 \leq |g(x)| \leq |x| \quad \rightsquigarrow \quad$ stetige Ergänzung $g(0) = 0$





Einseitige Stetigkeit

Analog zur Stetigkeit definiert man links- bzw. rechtsseitige Stetigkeit

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f^-(a), \quad \lim_{x \to b^+} f(x) = f^+(b)\,,$$

indem man nur Argumente x auf der entsprechenden Seite von a betrachtet.

Ist an einer Sprungstelle von f ein Funktionswert definiert, so wird dieser im Allgemeinen durch einen fett gezeichneten Punkt im Graphen hervorgehoben, um anzudeuten, ob er mit dem links- oder rechtsseitigen Grenzwert übereinstimmt.