Spezielle Grenzwerte von Folgen

Einige wichtige Grenzwerte sind in der folgenden Tabelle angegeben.

a_n	$a = \lim_{n\to\infty} a_n$
$\sqrt[n]{n}$	1
$n^s q^n\,,\ \lvert q\rvert < 1$	0
$n^{-s}\ln n\,,\ s > 0$	0
$q^n/n!$	0
$n!/n^n$	0
$(1+1/n)^n$	e
$(1-1/n)^n$	$1/\mathrm{e}$

Beispiel

Anwendung von Grenzwertregeln und Benutzung bekannter Grenzwerte

(i) Grenzwert der Folge $a_n = \left(1 + \frac{1}{2n+3}\right)^{4n}, \quad n = 1, 2, \ldots$:
setze $m = 2n + 3$, $n = (m-3)/2$

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{2m-6}$$

$\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} a_n &= \left(\lim_{m\to\infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m\right)^2 \cdot \left(\lim_{m\to\infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)\right)^{-6} \\ &= e^2 \cdot 1^{-6} = e^2 \end{aligned}$$

(ii) Grenzwert der Folge

$$a_n = \binom{3n}{n} / 2^n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Umformung $\quad \rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(3n)(3n-1)\cdots(2n+1)}{n\cdot(n-1)\cdots 1} \cdot \frac{1}{2^n} \\ &= \left[\frac{3}{2} \cdot \frac{3-1/n}{2} \cdots \frac{2+1/n}{2}\right] \cdot \frac{n^n}{n!} \end{aligned}$$

$[\ldots] \geq 1 \quad \implies$

$$\lim_{n\to\infty} a_n \geq \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!} = \infty$$

Beispiel

Berechnung von Grenzwerten der Form

$$\frac{a_n \pm b_n}{c_n \pm d_n}$$

durch Division durch die betragsmäßig größeren Ausdrücke

z.B: Umformung von

$$a_n = \frac{(3+\sqrt{n+4})^2}{5n+\ln n}$$

binomische Formel und Kürzen durch n $\leadsto$

$$\frac{9+6\sqrt{n+4}+n+4}{5n+\ln n} = \frac{13/n+6\sqrt{1/n+4/n^2}+1}{5+(\ln n)/n}$$

$1/n$, $1/n^2$, $(\ln n)/n \to 0 \quad \Longrightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{0+6\cdot\sqrt{0}+1}{5+0} = \frac{1}{5}$$