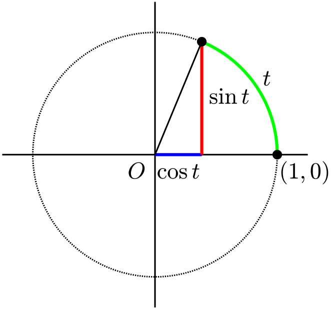
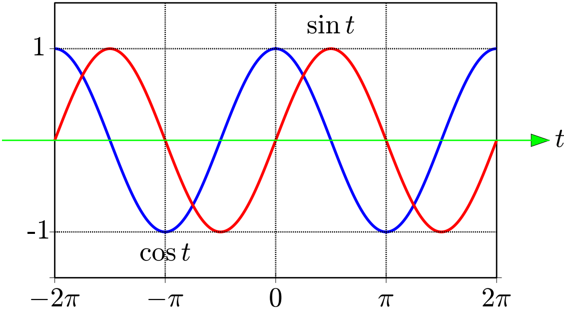
# Sinus und Kosinus

Mit

$$(\cos t, \sin t), \quad t \in \mathbb{R}$$

werden die Koordinaten des um den Ursprung $O$ mit Winkel $t$ gedrehten Punktes $(1,0)$ bezeichnet. Bis auf das Vorzeichen entsprechen also Kosinus und Sinus den Verhältnissen von An- bzw. Gegenkathete zur Hypothenuse in einem rechtwinkligen Dreieck.



Die beiden Kreisfunktionen sind $2\pi$-periodisch und es gilt

- $\cos t = \sin(t + \pi/2)$,
- $\cos t = \cos(-t)$, $\quad \sin t = -\sin(-t)$,
- $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$.

Einige spezielle Werte:

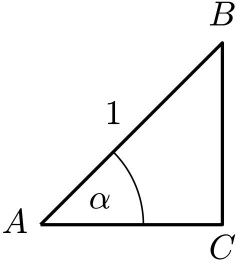
| | $0$ | $\pi/6 \mathrel{\widehat{=}} 30°$ | $\pi/4 \mathrel{\widehat{=}} 45°$ | $\pi/3 \mathrel{\widehat{=}} 60°$ | $\pi/2 \mathrel{\widehat{=}} 90°$ | $\pi \mathrel{\widehat{=}} 180°$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| cos | $1$ | $\sqrt{3}/2$ | $\sqrt{2}/2$ | $1/2$ | $0$ | $-1$ |
| sin | $0$ | $1/2$ | $\sqrt{2}/2$ | $\sqrt{3}/2$ | $1$ | $0$ |

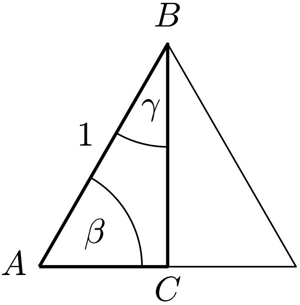
Ableitungen und Stammfunktionen:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\cos t &= -\sin t\,, & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sin t &= \cos t \\ \int \cos t \,\mathrm{d}t &= \sin t + C\,, & \int \sin t \,\mathrm{d}t &= -\cos t + C \end{aligned}$$

## Beweis

Berechnung spezieller Werte durch Betrachten eines gleichschenklig rechtwinkligen Dreiecks (links) und eines gleichseitigen Dreiecks (rechts)



(i) Gleichschenklig rechtwinkliges Dreieck:
$\alpha = (180^\circ - 90^\circ)/2 = 45^\circ$, $|\overline{AB}| = 1$, $|\overline{AC}| = s = |\overline{BC}|$
Satz des Pythagoras

$$|\overline{AC}|^2 + |\overline{BC}|^2 = 1^2$$

$$\implies \quad s = \sqrt{1/2} = 1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2 \text{ und}$$

$$\cos\alpha = |\overline{AC}| = \sqrt{2}/2, \quad \sin\alpha = |\overline{BC}| = \sqrt{2}/2$$

(ii) Gleichseitiges Dreieck (linke Hälfte):
$\beta = 180^\circ/3 = 60^\circ$, $\gamma = 60^\circ/2 = 30^\circ$, $|\overline{AB}| = 1$, $|\overline{AC}| = 1/2$
Satz des Pythagoras $\implies$

$$|\overline{BC}|^2 = 1^2 - (1/2)^2 = 3/4, \text{ d.h. } |\overline{BC}| = \sqrt{3}/2$$

und

$$\begin{aligned} \cos\beta &= |\overline{AC}| = 1/2, & \sin\beta &= |\overline{BC}| = \sqrt{3}/2 \\ \cos\gamma &= |\overline{BC}| = \sqrt{3}/2, & \sin\gamma &= |\overline{AC}| = 1/2 \end{aligned}$$