Regeln für stetige Funktionen

Für in einem Punkt a stetige Funktionen f und g sind

$$\begin{aligned} & rf \quad (r \in \mathbb{R}) \\ & f \pm g \\ & fg \\ & f/g \quad (\text{falls } g(a) \neq 0) \\ & f \circ g \end{aligned}$$

in a stetig.
Entsprechendes gilt für auf einem Intervall D stetige Funktionen sowie für links- und rechtsseitige Stetigkeitsstellen.

Beweis

Herleitung durch Anwenden der entsprechenden Regeln für Grenzwerte

betrachte beispielsweise die Komposition stetiger Funktionen
Stetigkeit von g:

$$x_n \to a \quad \implies \quad \lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(a)$$

Stetigkeit von f:

$$y_n \to y \quad \implies \quad \lim_{n\to\infty} f(y_n) = f(y)$$

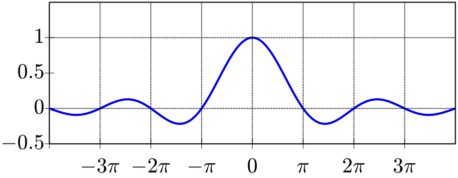
wähle $y_n = g(x_n)$ mit $x_n \to a$
$\rightsquigarrow$ Stetigkeit von $f \circ g$:

$$\lim_{n\to\infty} f(g(x_n)) = \lim_{n\to\infty} f(y_n) = f(y) = f(g(x))$$

Beispiel

Stetigkeit der sinc-Funktion

$$f(x) = \operatorname{sinc} x = \frac{\sin x}{x}$$

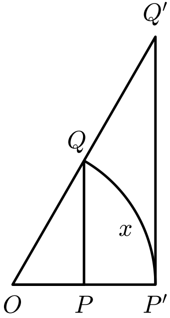


(i) Regeln für stetige Funktionen $\implies$ Stetigkeit des Quotienten für $x \neq 0$ (Nullstelle des Nenners)

(ii) Beweis der Stetigkeit bei $x = 0$

Vergleich der Flächeninhalte

- des Dreiecks $D_- = \triangle(O, P, Q)$ mit Seitenlängen $|\overline{OP}| = \cos x$, $|\overline{PQ}| = \sin x$,
- des Kreissektors S mit Radius $|\overline{OQ}| = 1$ und Bogenlänge (Winkel) x,
- des Dreiecks $D_+ = \triangle(O, P', Q')$ mit Seitenlängen $|\overline{OP'}| = 1$, $|\overline{P'Q'}| = \tan x$



$\rightsquigarrow$

$$\underbrace{\frac{\sin x \cos x}{2}}_{\text{area } D_-} \le \underbrace{\frac{x}{2}}_{\text{area } S} \le \underbrace{\frac{\tan x}{2}}_{\text{area } D_+}$$

Division durch $\sin x/2$ und Kehrwertbildung $\implies$

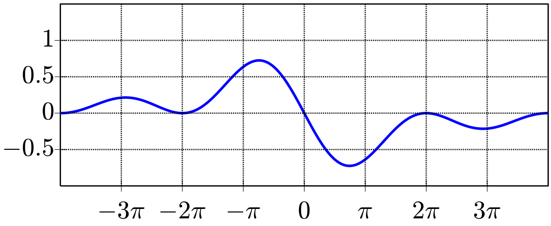
$$\frac{1}{\cos x} \ge \operatorname{sinc} x \ge \cos x$$

Vergleichskriterium und $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1 \implies \lim_{x\to 0} \operatorname{sinc} x = 1$

Beispiel

Stetigkeit der Funktion

$$f(x) = \frac{\cos x - 1}{x}$$



(i) Regeln für stetige Funktionen $\implies$ Stetigkeit des Quotienten für $x \neq 0$ (Nullstelle des Nenners)

(ii) Stetige Fortsetzbarkeit für $x \to 0$:
Umformung $\quad \rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} \frac{\cos x - 1}{x} &= \frac{(\cos x - 1)(\cos x + 1)}{x(\cos x + 1)} = \frac{\cos^2 x - 1}{x(\cos x + 1)} \\ &= -\frac{\sin^2 x}{x(\cos x + 1)} = -\frac{\sin x}{x} \frac{1}{\cos x + 1} \sin x \end{aligned}$$

Grenzwerte

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x + 1} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x \to 0} \sin x = 0$$

$\rightsquigarrow$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0 = 0$$