Regel von l'Hospital

Haben zwei stetig differenzierbare Funktionen f und g eine gemeinsame Nullstelle oder Polstelle bei a, so gilt

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} ,$$

falls der rechte Grenzwert existiert (gegebenenfalls im uneigentlichen Sinn).

Eine wiederholte Anwendung der Regel ist möglich, falls der Quotient $f'(a)/g'(a)$ ebenfalls ein unbestimmter Ausdruck der Form $0/0$ oder ∞/∞ ist.

Beispiel

Illustration der verschiedenen Fälle der Regel von l'Hospital

(i) Fall $0/0$:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 2x + 1}{3x^2 - 7x + 4} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2 - 2}{6x - 7} = -1$$

(ii) Fall $-\infty/\infty$:

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} -x = 0$$

(iii) Fall $x \to \infty$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi/2 - \arctan x}{1/x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-1/(1+x^2)}{-1/x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1$$

(iv) Mehrfache Anwendung:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin(x)}\right) &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-x}{x\sin(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{\sin(x)+x\cos(x)} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-\sin(x)}{2\cos(x)-x\sin(x)} = 0
\end{aligned}$$

Beachte: Die Existenz der zu berechnenden Grenzwerte ist erst durch die Existenz der nach Anwendung der Regel von l'Hospital enstehenden Grenzwerte gesichert.