Reelle Taylor-Reihe

Die Taylor-Reihe einer unendlich oft differenzierbaren Funktion f im Punkt a ist eine Entwicklung in eine Potenz-Reihe:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(x-a)^n, \quad c_n = \frac{1}{n!}\,f^{(n)}(a)\,.$$

Die ersten Terme der Reihe sind

$$f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{6}(x-a)^3 + \cdots\,.$$

Für $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe sowie alle ihre Ableitungen absolut in einem Intervall $(a-r, a+r)$ und divergiert für $|x-a| > r$. Für $|x-a| = r$ sind ohne weitere Untersuchungen keine Aussagen über die Konvergenz der Reihe möglich.

Die Schranke r für den Abstand vom Entwicklungspunkt wird als Konvergenzradius bezeichnet und lässt sich mit der Formel

$$r = \left(\limsup_{n \to \infty} |c_n|^{1/n} \right)^{-1}$$

berechnen. Dabei sind die Werte $r = 0$ und $r = \infty$ möglich. Das Konvergenz-Intervall ist in diesen Fällen leer (Konvergenz nur für $x = a$) bzw. ganz $\mathbb{R}$.

Alternativ kann der Konvergenzradius auch durch

$$r = \left(\lim_{n \to \infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} \right)^{-1}$$

bestimmt werden, falls der Grenzwert der Quotienten existiert.

Beweis

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\right|} = |x-a| \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = |x-a|/r$$

Wurzelkriterium $\implies$

- Konvergenz für $|x-a| < r$
- Divergenz für $|x-a| > r$
- keine Konvergenzaussage für $|x-a| = r$

analoge Betrachtung mit dem Quotientenkriterium
$\rightsquigarrow$ alternative Formel für r

Beispiel

Divergenz der Taylor-Reihe für die unendlich oft differenzierbare Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x^2), & \text{für } x \neq 0 \\ 0, & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

Ableitungen:

$$f^{(n)}(x) = \frac{p_n(1/x)}{\exp((1/x)^2)}$$

mit Polynomen p_n

$\rightsquigarrow \quad f^{(n)}(x) \to 0$ für $x \to 0$

Taylor-Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{0}{n!} x^n = 0 \quad \forall x$$

Konvergenzradius 0, keine Übereinstimmung mit der Funktion

Beispiel

Taylor-Reihe der Exponentialfunktion

$$f(x) = \exp(x)$$

Ableitungen

$$f^{(n)}(x) = \exp(x), \quad f^{(n)}(0) = 1$$

$\rightsquigarrow$ Taylor-Reihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots$$

Konvergenzradius

$$1/r = \limsup_{n\to\infty} 1/\sqrt[n]{n!} = 0$$

$\implies$ $r = \infty$, d.h. Konvergenz auf ganz $\mathbb{R}$

Beispiel

Taylor-Reihe im Punkt $a = 4$ der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

(i) Ableitungen:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -\frac{1}{2}\,x^{-3/2} \\
f''(x) &= \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\,x^{-5/2} \\
&\cdots \\
f^{(n)}(x) &= (-1)^n\,2^{-n}\cdot 1\cdot 3\cdots(2n-1)\cdot x^{-(2n+1)/2}
\end{aligned}$$

(ii) Koeffizienten:
Auswerten der Ableitungen am Entwicklungspunkt $\rightsquigarrow$

$$
\begin{aligned}
c_n &= \frac{f^{(n)}(4)}{n\,!} = (-1)^n \, \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} \, 2^{-2n-1} \\
&= (-1)^n \, \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (2n-1) \cdot 2n}{(2 \cdot 4 \cdots (2n))^2} \, 4^{-n} \cdot 2^{-1} \\
&= \frac{(-1)^n}{2} \, \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (2n-1) \cdot 2n}{(2^n (1 \cdots n))^2 \, 4^n} = \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{4n+1} \, (n!)^2}
\end{aligned}
$$

(iii) Taylor-Reihe:

$$
f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \, (x-4)^n = \frac{1}{2} \, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{4n} \, (n!)^2} \, (x-4)^n
$$

erste Terme

$$
\frac{1}{2} - \frac{1}{16} \, (x-4) + \frac{3}{256} \, (x-4)^2 + \cdots
$$

(iv) Konvergenzradius:

$$1/r = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}, \quad |c_n| = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\cdot\left(\frac{1}{2}\,4^{-n}\right)$$

$3/2,\ 5/4,\ \ldots \geq 1$ und $1/2,\ 3/4,\ \ldots \leq 1 \quad \Longrightarrow$

$$\frac{1}{2}\,\frac{1}{2n}\,4^{-n} \leq |c_n| \leq \frac{1}{2}\,4^{-n}$$

Vergleichskriterium $\quad \rightsquigarrow$

$$\frac{1}{4}\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{1/(4n)} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} \leq \frac{1}{4}\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{1/2}$$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1/n} = 1,\ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\mathrm{const}} = 1 \quad \Longrightarrow$

$$r = \frac{1}{1/4} = 4$$

Beispiel

Beweis der Eulerschen Formel, $\exp(\mathrm{i}t) = \cos t + \mathrm{i}\sin t$, durch Taylor-Entwicklung

Taylor-Entwicklungen von Sinus und Kosinus:

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} - \cdots, \quad \sin t = t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120} - \cdots$$

$$-\frac{t^2}{2} = \frac{(\mathrm{i}t)^2}{2}, \quad -\frac{t^3}{6} = \frac{\mathrm{i}^2 t^3}{3!}, \quad +\frac{t^4}{24} = \frac{(\mathrm{i}t)^4}{4!}, \quad +\frac{t^5}{120} = \frac{\mathrm{i}^4 t^5}{5!}$$

$\Longrightarrow$

$$\cos t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}t)^{2k}}{(2k)!}, \quad \mathrm{i}\sin t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}t)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Addition $\rightsquigarrow$ Taylor-Entwicklung der Eulerschen Formel:

$$\begin{aligned} \exp(\mathrm{i}t) &= 1 + \mathrm{i}t + \frac{(\mathrm{i}t)^2}{2!} + \frac{(\mathrm{i}t)^3}{3!} \cdots \\ &= \left(1 - \frac{t^2}{2!} \pm \cdots\right) + \mathrm{i}\left(t - \frac{t^3}{3!} \pm \cdots\right) = \cos t + \mathrm{i}\sin t \end{aligned}$$